

سری سوم تمرینات

تمرین ۱

نشان دهید توابع زیر در ناحیه گفته شده هارمونیک می‌باشند.

(آ) تابع $\ln(x^2 + y^2)$ در همه جا به جز مبدا

(ب) تابع $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ در همه جا به جز محور y ها

تمرین ۲

تابع $F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ را در نظر بگیرید. سپس مشتق‌های F_{11} و F_{12} را در نقاط به غیر از مبدا محاسبه کنید. سپس همین مشتق‌ها را در مبدا محاسبه کنید. توضیح دهید چطور نتیجه‌ای که به دست آورده اید با قضیه مهم نبودن ترتیب مشتق‌گیری در مشتق‌های جزئی تناقضی ندارد.

تمرین ۳

نشان دهید تابع $u(x, y, t) = t^{-1} e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{t}}$ جواب معادله حرارت دو بعدی می‌باشد. یعنی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

تمرین ۴

همه نقاطی را که نمودار دو تابع $z = e^x - y$ و $z = x - e^y$ در آن نقاط بر یکدیگر مماس می‌شوند را به دست آورید.

تمرین ۵

سری سوم تمرینات

با استفاده از دو روش متفاوت مشتق $\frac{\partial z}{\partial x}$ را به دست آورید که در آن داریم.

$$z = \tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right), \quad u = 2x + y, \quad v = 3x - y.$$

تمرین ۶

در بخش‌های زیر فرض کنید که تابع f مشتق‌های جزئی پیوسته از هر مرتبه‌ای را دارا می‌باشد. مطلوبست در هر بخش مشتق جزئی خواسته شده را محاسبه کنید.

(آ) اگر $x = t \cos s$ و $y = t \sin s$ مطلوبست محاسبه $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f(x, y)$

(ب) مقدار $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(y^2, xy, -x^2)$ را بر حسب مشتق‌های جزئی تابع f به دست آورید.