

## تمرین سری نهم

## تمرین ۱

مشتق  $f(x) = x - \sin^{-1}(\sin x)$  به ازای  $-\pi \leq x \leq \pi$  را یافته و نمودار  $f$  را بر این بازه رسم نمائید.

## تمرین ۲

انتگرال‌های نامعین زیر را محاسبه کنید:

$$\int \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \quad \text{آ}$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx \quad \text{ب}$$

$$\int \frac{x(x-1)}{x^2-1} dx \quad \text{ج}$$

$$\int \tan^2 x dx \quad \text{د}$$

$$\int \cos^2 x dx \quad \text{ه}$$

$$\int \frac{2 + \sin x}{\cos^2 x} dx \quad \text{و}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{ز}$$

$$\int \sqrt{x^2+1} dx \quad \text{ح}$$

## تمرین ۳

$\frac{d}{dx}(Ae^{ax} \cos bx + Be^{ax} \sin bx)$  را محاسبه کرده و با استفاده از آن، انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int e^{ax} \cos bx dx \quad \text{آ}$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx \quad \text{ب}$$

تمرین سری نهم

تمرین ۴

برای تابع  $f$  و بازه  $[a, b]$  داده شده،  $L(f, P_n)$  و  $U(f, P_n)$  را حساب کنید. سپس بررسی کنید که تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  داده شده انتگرال پذیر است یا خیر؟

(آ)  $[a, b] = [0, 2], f(x) = 1 - x$

(ب)  $[a, b] = [0, 1], f(x) = x^3$

(ج)  $[a, b] = [0, 3], f(x) = e^x$

تمرین ۵

فرض کنید

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

افزای از  $[a, b]$  بوده و  $P'$  تقریبی از  $P$  باشد که نقطه  $x'$  را بیشتر دارد به طوری که مثلاً به ازای  $i$  بین ۱ و  $n$ ،  $x_{i-1} < x' < x_i$  نشان دهید که به ازای هر تابع پیوسته  $f$ ،

$$L(f, P) \leq L(f, P') \leq U(f, P') \leq U(f, P).$$

تمرین ۶

انتگرال‌های زیر را با استفاده از خواص انتگرال معین و تعبیر انتگرال‌ها به صورت مساحت حساب کنید.

(آ)  $\int_{-a}^a (a - |s|) ds$

(ب)  $\int_{-\sqrt{4}}^0 \sqrt{4 - x^2} dx$

(ج)  $\int_{-2}^4 (e^x - e^{-x}) dx$

(د)  $\int_1^2 \sqrt{4 - x^2} dx$

(ه)  $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \operatorname{sgn}(x - 1) dx$

تمرین ۷

فرض کنید  $a < b$  و  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته باشد. ثابت  $k$  را چنان بیابید که انتگرال  $\int_a^b (f(x) - k)^2 dx$  مینیمم باشد.