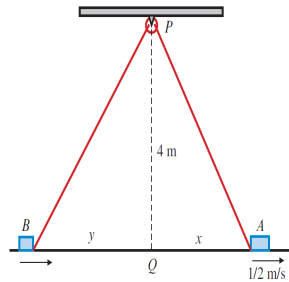


تمرین سری هشتم

تمرین ۱

دو صندوق A و B کف یک انبار قرار دارند. صندوق‌ها با یک طناب ۱۵ متری به هم وصل شده‌اند و هر صندوق در سطح انبار به انتهای یک طناب وصل است. طناب را کشیده و از روی قرقره P که در طاق، ۴ متر بالای نقطه‌ی Q در کف درست وسط صندوق‌ها نصب شده رد کرده‌ایم:



اگر صندوق A در ۳ متری Q بوده و مستقیماً با سرعت $1/2$ متر بر ثانیه دور شود، سرعت حرکت B به سمت Q چقدر خواهد بود؟

تمرین ۲

فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

نشان دهید f بر $[0, \infty)$ پیوسته و بر $(0, \infty)$ مشتق‌پذیر است ولی در نقطه‌ی انتهایی $x = 0$ نه ماکزیمم موضعی دارد نه مینیمم موضعی.

تمرین ۳

برای توابع داده شده، مقادیر اکستریم موضعی را (در صورت وجود) بدست آورید و رده‌بندی کنید. معین کنید که این مقادیر اکستریم مطلق‌اند یا خیر. نمودار تابع را نیز رسم کنید.

$$f(x) = x^5 + x^3 + 2x \quad \text{آ} \quad \text{روی دامنه‌ی } (a, b]$$

تمرین سری هشتم

ب) $f(x) = x - 2 \tan^{-1} x$

ج) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

تمرین ۴

برای توابع داده شده، نقاط عطف را بیابید.

آ) $f(x) = (3 - x^2)^2$

ب) $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$

ج) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

د) $f(x) = x + \sin 2x$

تمرین ۵

برای توابع داده شده، نقاط بحرانی را محاسبه کنید. سپس نقاط بحرانی را با استفاده از آزمون مشتق دوم (هر جا که ممکن بود) رده‌بندی کنید.

آ) $f(x) = x(x - 2)^2 + 1$

ب) $f(x) = x \ln x$

ج) $f(x) = x e^x$

تمرین ۶

فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

نشان دهید $f(0) = f'(0) = 0$ ، در نتیجه محور x بر نمودار تابع f در $x = 0$ مماس است. ولی f' در $x = 0$ پیوسته نیست و در نتیجه $f''(0)$ وجود ندارد. نشان دهید که تقعر f در هیچ بازه‌ای با نقطه انتهایی $x = 0$ ثابت نیست.

این مساله نشان می‌دهد که یک تابع ممکن است در یک نقطه بحرانی نه ماکزیمم موضعی نه مینیمم موضعی و نه عطف داشته باشد.

تمرین سری هشتم

تمرین ۷

یک پنجره با محیط 10° متر بوده و به شکل مستطیل است که ضلع فوقانی آن با یک نیم‌دایره عوض شده است. ابعاد مستطیل را در صورتی بیابید که پنجره بیشترین نور را دریافت کند.

تمرین ۸

اگر طول ضلع یک مربع از 10° سانتی‌متر به $10/4^\circ$ سانتی‌متر افزایش یابد، مساحت آن تقریباً چقدر زیاد می‌شود؟

تمرین ۹

چندجمله‌ای‌های تیلور مذکور برای توابع زیر را با استفاده از تعریف چندجمله‌ای تیلور حساب کنید.

(آ) چندجمله‌ای تیلور از درجه n برای تابع $f(x) = \frac{1}{1+x}$ حول $x = 1$.

(ب) چندجمله‌ای تیلور از درجه 3 برای تابع $f(x) = \sec x$ حول $x = 0$.

تمرین ۱۰

با ترکیب مناسبی از چندجمله‌ای‌های تیلور برای $\ln(1+x)$ و $\ln(1-x)$ حول $x = 0$ چندجمله‌ای تیلور از درجه $2n+1$ حول $x = 0$ برای

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

را پیدا کنید.