



دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا
ریاضی مهندسی

تمرین سری سوم- پاییز ۱۴۰۲-۱۴۰۱

۱. مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله اشتروم-لیوویل منظم زیر را روی $[1, e]$ بیابید. سپس، سری فوریه تعمیم یافته تابع $f(x) = x$ را به دست آورید.

$$\begin{cases} (x^\nu y')' + \lambda y = 0 \\ y(1) = y(e) = 0 \end{cases}$$

۲. به ازای هر عدد حقیقی ثابت $a \geq 0$ ، به تابع

$$u_a(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$$

تابع پله‌ای گفته می‌شود. درباره تبدیل فوریه این تابع بحث کنید.

۳. با استفاده از انتگرال‌های فوریه مناسب درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

$$\int_0^\infty \frac{\omega^\nu \sin \omega x}{\omega^\nu + \frac{1}{4}} d\omega = \frac{\pi}{\sqrt{4}} e^{-x} \cos x \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \frac{\pi \omega}{\sqrt{4}} \cos \omega x}{1 - \omega^2} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{4}} \cos x & |x| < \frac{\pi}{\sqrt{4}} \\ 0 & |x| \geq \frac{\pi}{\sqrt{4}} \end{cases} \quad (\text{ب})$$

۴. فرض کنید تابع f در بازه $(0, \infty)$ تعریف شده است و $A(\omega)$ ضریب فوریه کسینوسی آن است.

(الف) ثابت کنید

$$\int_0^\infty A(\omega)^\nu d\omega = \frac{\nu}{\pi} \int_0^\infty f(x)^\nu dx$$

(ب) به کمک قسمت (الف) حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^\nu}$ را به دست آورید.

۵. تبدیل فوریه تابع $f(x) = e^{-ax^\nu}$ ($a > 0$) را به دست آورید.

۶. تبدیل فوریه کسینوسی و تبدیل فوریه سینوسی تابع f با ضابطه

$$f(x) = xe^{-ax}, \quad a > 0, \quad x > 0$$

را به دست آورید.