سوال ۱) با توجه به اینکه ذره P روی اشتراک استوانه و صفحه است. پس مسیر حرکت ذره برابر خم

$$\gamma(t) = (x(t),\ 2-x(t),\ x^2(t))$$

قرار دارد. می‌خواهیم بردار سرعت را زمانی که $x(t)=1$ است به دست آوریم

$$\gamma'(t) = (x'(t),\ -x'(t),\ 2x(t)x'(t))$$ $\boxed{\text{۵ نمره}}$

$$|\gamma'(t)| = 3 \Rightarrow \sqrt{x'^2(t) + x'^2(t) + 4\underbrace{x^2(t)}_{1}\,x'^2(t)} = 3 \Rightarrow 6x'^2(t) = 9$$

$$x'(t) = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$ $\boxed{\text{۳ نمره}}$

حال چون گفته شده ذره در جهت افزایش y حرکت می‌کند پس مشتق مولفه دوم باید مثبت باشد یعنی $-x'(t)$ باید مثبت باشد در نتیجه $x'(t) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ قابل قبول است. بردار سرعت در نقطه خواسته شده برابر $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}},\ -2\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ است

$\boxed{\text{۲ نمره}}$

سوال ۲)

$$p_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad q_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad f(p_0) = 1 \quad g(q_0) = p_0$$

$$\nabla f(p_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad Hf(p_0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

الف) تقریب خطی f و g شامل مشتق‌های مرتبه اول و مقدار تابع می‌باشد. در واقع مقدار تابع را از صفحه مماس بر نمودار آن محاسبه می‌کنیم

$$f \approx f(p_0) + (\nabla f(p_0))^T \left(\begin{bmatrix} x-3 \\ y-4 \\ z-5 \end{bmatrix} \right) = 1 + 1(x-3) - 2(y-4) - 1(z-5)$$ $\boxed{\text{۳ نمره}}$

$$g \approx \underbrace{g(q_0)}_{p_0} + D_{q_0} g \left(\begin{bmatrix} x-6 \\ y-7 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-6 \\ y-7 \end{bmatrix}$$ $\boxed{\text{۳ نمره}}$

$$= \begin{bmatrix} 3 + 3(x-6) \\ 4 - (x-6) - 2(y-7) \\ 5 + 2(x-6) + (y-7) \end{bmatrix}$$

$$f \approx f(p_0) + D_{p_0} f\,(x - p_0)$$ $\boxed{\text{۱ نمره}}$

$$g \simeq g(q_0) + D_{q_0} g\,(x - q_0)$$ $\boxed{\text{۱ نمره}}$

ب) $f\circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ، بردار قائم $f\circ g$ در نقطه q_0 را می‌توانیم به عنوان سطح تراز صفر تابع $h:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ در نظر بگیریم

$(x,y,z) \mapsto ((f\circ g)(x,y) - z)$

و می‌دانیم گرادیان h بر سطح تراز صفر در نقطه q_0 عمود است.

$$\nabla h = (\nabla(f\circ g), -1) = \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \atop -1 \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ +3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

توضیحات ۲ نمره، ۳ نمره محاسبه

ج) بردار عمود بر سطح تراز تابع $f\circ g$ در نقطه q_0 همان گرادیان $f\circ g$ در نقطه q_0 است که در قسمت قبل حساب کرده‌ایم

$$\begin{bmatrix} 3 \\ +3 \end{bmatrix}$$

د) مشتق مرتبه اول $f\circ g$ را که حساب کردیم که همان $\begin{bmatrix} 3 \\ +3 \end{bmatrix}$ بود.

$$D(f\circ g) = Dg\, Df(g(x))$$

حال اگر یک بار دیگر مشتق بگیریم. باید از قاعده مشتق حاصل‌ضرب استفاده کنیم (مشتق Dg برابر مشتق‌های دوم g است که همگی صفر در نقطه داریم)

$$Dg^T\, Hf(\underbrace{g(q_0)}_{p_0})\, Dg$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

توضیحات ۷ نمره - محاسبه ۳ نمره

ه) می‌دانیم اگر در خلاف جهت گرادیان $f\circ g$ در نقطه q_0 حرکت کنیم بیشترین کاهش مقدار را خواهیم داشت پس باید در جهت

$$-\begin{bmatrix} 3 \\ +3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

حرکت کنیم.

توضیحات ۷ نمره - محاسبه ۳ نمره

سوال ۳: معادله داده شده را برابر G در نظر میگیریم.

$$\frac{\partial G}{\partial z} = -2z F_1(x^2-z^2, y^2+xz) + x F_2(x^2-z^2, y^2+xz)$$

حال اگر نقطه (۱,۱,۰) را جایگذاری کنیم

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 2 F_2(1,1) = 2 \neq 0$$

پس طبق قضیه تابع ضمنی میتوانیم در معادله داده شده z را به صورت تابعی از x و y بنویسیم. ۸ نمره

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial z}}(1,1,0) = -\frac{2xF_1(x^2-z^2, y^2+xz) + zF_2(x^2-z^2, y^2+zz)}{2} = \frac{-2\times 1}{2} = -1$$

۷ نمره

سوال ٤) کره واحد به مرکز مبدأ برابر $\overbrace{x^2+y^2+z^2=1}^{g_1}$ و کره دیگر به فرمول $\overbrace{(u-1)^2+(v-2)^2+(w-3)^2=10^2}^{g_2}$ می باشد

حال تابع فاصله (یا توان دوم آن) به صورت $(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2$ است. به علت اینکه تابعی که میخواهیم کمینه یا بیشینه کنیم پیوسته است و دامنه آن کراندار و بسته است پس مقدار کمینه و بیشینه وجود دارد (۱ نمره).

مستقل خطی بودن ∇g_1 و ∇g_2 (دو نمره)

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \nabla g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2(u-1) \\ 2(v-2) \\ 2(w-3) \end{bmatrix}$$

به وضوح این دو بردار مستقل خطی هستند

حال به دنبال λ_1 و λ_2 طبق ضرایب لاگرانژ هستیم که اولا شرط g_1 و g_2 برقرار باشد ثانیا

نوشتن توابع و اعمال قضیه ضریب لاگرانژ ۸ نمره

محاسبات ٤ نمره

$$\left.\begin{aligned} 2(x-u)+2\lambda_1 x &= 0 \\ 2(y-v)+2\lambda_1 y &= 0 \\ 2(z-w)+2\lambda_1 z &= 0 \\ -2(x-u)+2\lambda_2(u-1) &= 0 \\ -2(y-v)+2\lambda_2(v-2) &= 0 \\ -2(z-w)+2\lambda_2(w-3) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \lambda_1 x &= -\lambda_2(u-1) \\ \lambda_1 y &= -\lambda_2(v-2) \\ \lambda_1 z &= -\lambda_2(w-3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

با به توان ۲ رساندن و جمع کردن

داشتن ۱ و از شرط g_1 و g_2 داریم

$$\lambda_1^2 = 10^2\lambda_2^2 \Rightarrow \lambda_1 = \pm\lambda_2 10$$

$\lambda_1 = \pm 10\lambda_2$ یکی از آنها معادل کمینه و دیگری بیشینه است. اگر $\lambda_1 = 10\lambda_2$ از فرمول اول به $10x = -(u-1)$

می‌رسیم که با جایگذین کردن در معادله $(x-u) + \lambda_1 x = 0$ می‌توانیم x را برحسب λ_1 تعیین کنیم. سپس برای y و z

نیز چنین می‌کنیم و از رابطه $x^2+y^2+z^2=1$، λ_1 را تعیین می‌کنیم و نقاط مشخص می‌شود.

اگر دانشجو با محاسبات راه حل کردن معادلات را نشان داده باشد کفایت می‌کند.