ریاضی عمومی ۱ **(پاییز ۱۴۰۱)**

پاسخ آزمون میان‌ترم

پاسخ سوال ۱

رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع در صفحه مختلط که مرکز ثقل آن در مبدا مختصات واقع است را می‌توان به صورت

$$z_1 = re^{i\theta}, \quad z_2 = re^{i\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)}, \quad z_3 = re^{i\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)},$$

در نظر گرفت، که r شعاع دایره محیطی این مثلث است **(۳ نمره)**.

$$\begin{aligned} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= r^2 e^{2i\theta}\left(1 + e^{(4\pi/3)i} + e^{(-4\pi/3)i}\right) \\ &= r^2 e^{2i\theta}\left((1 + \cos(4\pi/3) + \cos(-4\pi/3)) + i\left(\sin(4\pi/3) + \sin(-4\pi/3)\right)\right) \\ &= r^2 e^{2i\theta}\left(\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + i\left(\sin(4\pi/3) - \sin(4\pi/3)\right)\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

(۳ نمره). از طرفی

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2} &= z_1^{-2} + z_2^{-2} + z_3^{-2} \\ &= r^{-2} e^{-2i\theta}\left(1 + e^{(-4\pi/3)i} + e^{(4\pi/3)i}\right) \\ &= r^{-2} e^{-2i\theta}\left((1 + \cos(-4\pi/3) + \cos(4\pi/3)) + i\left(\sin(-4\pi/3) + \sin(4\pi/3)\right)\right) \\ &= r^{-2} e^{-2i\theta}\left(\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + i\left(-\sin(4\pi/3) + \sin(4\pi/3)\right)\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

(۴ نمره).

اشتباه رایج: برای حل مساله با این فرض اضافی که یکی از رئوس مثلث روی یکی از محورهای حقیقی یا مختلط قرار داشته باشد (مثلا حالتی که $\theta = 0$)، بین یک تا دو نمره کسر شده است.

پاسخ سوال ۲

برای محاسبه‌ی حد دنباله‌ی $a_n = n(a^{۱/n} - ۱)$، تابع $f(x) = x(a^{۱/x} - ۱)$ با دامنه‌ی $x > ۰$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به پیوستگی تابع $f(x) = x(a^{۱/x} - ۱)$ روی $x > ۰$، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{۱}{n}} - ۱) = \lim_{x\to\infty} x(a^{\frac{۱}{x}} - ۱),$$

(۲ نمره). لذا، کافی است حد تابع $f(x)$ وقتی $x \to \infty$ را محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to\infty} x(a^{\frac{۱}{x}} - ۱) = \lim_{t\to ۰^+} \frac{a^t - ۱}{t} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a^t\right)_{t=۰} = \big((\ln a)a^t\big)_{t=۰} = \ln a,$$

(۸ نمره). توجه داریم که جمله دوم خط بالا، تعریف مشتق راست تابع a^t در نقطه‌ی $t = ۰$ است. لذا، تساوی دوم از مشتق‌پذیری تابع a^t بدست آمده است.
حاصل حد $\lim_{x\to\infty} x(a^{\frac{۱}{x}} - ۱)$ یا به طور معادل حاصل حد $\lim_{t\to ۰^+} \frac{a^t - ۱}{t}$ را می‌توان با استفاده از قواعد هم‌ارزی یا هوپیتال محاسبه کرد، که متناسب به درستی و کامل بودن راه‌حل، نمره داده شده است.
اشتباه رایج: عدم توجه به این‌که قواعد هم‌ارزی و هوپیتال برای توابع با دامنه گسسته برقرار نیستند. برای این اشتباه ۲ نمره کسر شده است.

پاسخ سوال ۳

با در نظر گرفتن r به‌عنوان شعاع سطح مقطع و h به عنوان ارتفاع استوانه، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r h \\ V = \pi r^۲ h \end{array}\right\} \Rightarrow S(r) = ۲\pi r^۲ + \frac{۲V}{r},$$

که در آن $r \in (۰, \infty)$ **(۳ نمره)**. توجه داریم $S(r)$ تابعی مشتق‌پذیر (و درنتیجه پیوسته) روی بازه‌ی $(۰, \infty)$ است **(۱ نمره)**. لذا، برای بدست آوردن استوانه با سطح کل کمینه، نقطه ایستای $S(r)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} S(r) = ۰ \Rightarrow ۴\pi r - \frac{۲V}{r^۲} = ۰ \Rightarrow r = \sqrt[۳]{\frac{V}{۲\pi}},$$

(۴ نمره). چون $\lim_{r\to ۰^+} S(r) = \lim_{r\to\infty} S(r) = \infty$، و با توجه به این‌که $r = \sqrt[۳]{V/(۲\pi)}$ تنها نقطه ایستای تابع پیوسته‌ی $S(r)$ روی بازه‌ی $(۰, \infty)$ است، می‌توان نتیجه گرفت که $r = \sqrt[۳]{V/(۲\pi)}$ کمینه‌کننده‌ی سراسری تابع $S(r)$ است **(۲ نمره)**. این مطلب را می‌توان از این‌که $S'(r) > ۰$، برای $r > \sqrt[۳]{V/(۲\pi)}$ و $S'(r) < ۰$، برای $r < \sqrt[۳]{V/(۲\pi)}$، نیز نتیجه گرفت. بنابراین، در میان استوانه‌های قائم با سطح مقطع دایره و حجم ثابت V، استوانه با شعاع قاعده‌ی $r = \sqrt[۳]{V/(۲\pi)}$ و ارتفاع

$$h = \frac{V}{\pi r^۲} = \sqrt[۳]{\frac{۴V}{\pi}},$$

کم‌ترین سطح کل را دارد.
اشتباه رایج: عدم ارائه دلیل درست و کافی برای این‌که نقطه‌ی ایستای $r = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$، کمینه‌کننده‌ی سراسری تابع $S(r)$ روی بازه‌ی $(0, \infty)$ است. برای این اشتباه تا ۲ نمره کسر شده است.

پاسخ سوال ۴

آ) برای $x > -1$، f تابعی نزولی است. درنتیجه برای $x > -1$ و هر عدد طبیعی n، f^{2n} تابعی صعودی و f^{2n-1} تابعی نزولی هستند **(۱ نمره)**. لذا، با تاثیر تابع صعودی f^{2n} روی نامساوی $f(1) = \frac{3}{2} \geq 1$، داریم $f^{2n+1}(1) \geq f^{2n}(1)$ **(۱ نمره)**. از طرفی،

$$f(1) = \frac{3}{2} = 1/5 \Rightarrow f^2(1) = \frac{7}{5} = 1/4 \Rightarrow f^3(1) = \frac{17}{12} = 1/4166\ldots$$

(۱ نمره). درنتیجه، برای عدد طبیعی دلخواه n، با تاثیر تابع صعودی f^{2n-2} بر طرفین نامساوی $f^3(1) \leq f(1)$ داریم $f^{2n+1}(1) \leq f^{2n-1}(1)$، یعنی دنباله‌ی $\{f^{2n+1}(1)\}$ نزولی است **(۱ نمره)**. حال با تاثیر تابع نزولی f بر طرفین نامساوی $f^{2n+1}(1) \leq f^{2n-1}(1)$، خواهیم داشت $f^{2n+2}(1) \geq f^{2n}(1)$، یعنی دنباله‌ی $\{f^{2n}(1)\}$ صعودی است **(۱ نمره)**.

ب) مطابق قسمت (آ)، $\{f^{2n}(1)\}$ دنباله‌ای صعودی و از بالا کراندار به $f(1)$ است، چون‌که

$$f^{2n}(1) \leq f^{2n+1}(1) \leq f(1).$$

درنتیجه، دنباله‌ی $\{f^{2n}(1)\}$ همگراست **(۱ نمره)**. با توجه به پیوستگی تابع f^2 و با فرض این‌که $\lim_{n\to\infty} f^{2n}(1) = L$، داریم:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f^{2n}(1) = \lim_{n\to\infty} f^2\left(f^{2n-2}(1)\right) &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^{2n}(1) = f^2\left(\lim_{n\to\infty} f^{2n-2}(1)\right) \\
&\Rightarrow L = f^2(L) \Rightarrow L = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1+L}} \\
&\Rightarrow 3L + 2L^2 = 4 + 3L \Rightarrow L^2 = 2 \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^{2n}(1) = \sqrt{2},
\end{aligned}$$

که تساوی آخر از این‌که $f^{2n}(1) \geq 1$ و درنتیجه $L \geq 1$ بدست آمده است **(۲ نمره)**.
به طور مشابه، از قسمت (آ) می‌توان نتیجه گرفت که $\{f^{2n+1}(1)\}$ دنباله‌ای نزولی و از پائین کراندار به $f^2(1)$ است و درنتیجه همگراست. حال با استفاده از پیوستگی تابع f، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f^{2n+1}(1) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^{2n}(1)\right) = f(\sqrt{2}) = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

(۲ نمره).

ج) با توجه به قسمت (ب)، می‌دانیم که $\lim_{n\to\infty} f^n(۱) = \sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲\ldots$. از طرفی

$$f(۱) = \frac{۳}{۲} = ۱/۵ \Rightarrow f^۲(۱) = \frac{۷}{۵} = ۱/۴ \Rightarrow f^۳(۱) = \frac{۱۷}{۱۲} = ۱/۴۱۶۶\ldots$$
$$\Rightarrow f^۴(۱) = \frac{۴۱}{۲۹} = ۱/۴۱۳۷\ldots \Rightarrow f^۵(۱) = \frac{۹۹}{۷۰} = ۱/۴۱۴۲۸\ldots$$

و درنتیجه

$$\begin{aligned}
|f(۱) - \sqrt{۲}| &= ۰/۰۸۵۷ \not< ۱۰^{-۳},\\
|f^۲(۱) - \sqrt{۲}| &= ۰/۰۱۴۲\ldots \not< ۱۰^{-۳},\\
|f^۳(۱) - \sqrt{۲}| &= ۰/۰۰۲۳\ldots \not< ۱۰^{-۳},\\
|f^۴(۱) - \sqrt{۲}| &= ۰/۰۰۰۵\ldots < ۱۰^{-۳},\\
|f^۵(۱) - \sqrt{۲}| &= ۰/۰۰۰۰۶\ldots < ۱۰^{-۳}.
\end{aligned}$$

یعنی برای $n = ۴$ و $n = ۵$ داریم $|f^n(۱) - \sqrt{۲}| < ۱۰^{-۳}$ **(۲ نمره)**. از صعودی بودن دنباله‌ی $\{f^{۲n}(۱)\}$، برای هر $i \geq ۲$، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\sqrt{۲} \geq f^{۲i}(۱) \geq f^۴(۱) \Rightarrow |f^{۲i}(۱) - \sqrt{۲}| \leq |f^۴(۱) - \sqrt{۲}| \leq ۱۰^{-۳},$$

(۱ نمره). از طرف دیگر، از نزولی بودن دنباله‌ی $\{f^{۲n+۱}(۱)\}$، برای هر $i \geq ۲$، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\sqrt{۲} \leq f^{۲i+۱}(۱) \leq f^۵(۱) \Rightarrow |f^{۲i+۱}(۱) - \sqrt{۲}| \leq |f^۵(۱) - \sqrt{۲}| \leq ۱۰^{-۳},$$

(۱ نمره). درنتیجه، برای هر $n \geq ۴$ داریم $|f^n(۱) - \sqrt{۲}| \leq ۱۰^{-۳}$ **(۱ نمره)**.

پاسخ سوال ۵

آ) با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای تابع $f(x) = \ln x$، برای هر $x > ۱$، عدد $\xi_x \in (۱, x)$ چنان یافت می‌شود که

$$f'(\xi_x) = \frac{\ln x - \ln ۱}{x - ۱} \Rightarrow \frac{\ln x}{x - ۱} = \frac{۱}{\xi_x} \leq ۱ \Rightarrow \ln x \leq x - ۱.$$

به طور مشابه، برای هر $۰ < x < ۱$، عدد $\xi_x \in (x, ۱)$ چنان یافت می‌شود که

$$f'(\xi_x) = \frac{\ln ۱ - \ln x}{۱ - x} \Rightarrow \frac{-\ln x}{۱ - x} = \frac{۱}{\xi_x} \geq ۱ \Rightarrow -\ln x \geq ۱ - x \Rightarrow \ln x \leq x - ۱.$$

این‌بار با در نظر گرفتن تابع $g(x) = x\ln x$، برای هر $x > ۱$، عدد $\xi_x \in (۱, x)$ چنان یافت می‌شود که

$$g'(\xi_x) = \frac{x\ln x - \ln ۱}{x - ۱} \Rightarrow \frac{x\ln x}{x-۱} = ۱ + \ln \xi_x \geq ۱ \Rightarrow \ln x \geq \frac{x-۱}{x}.$$

به طور مشابه، برای هر $۰ < x < ۱$، عدد $\xi_x \in (x, ۱)$ چنان یافت می‌شود که

$$g'(\xi_x) = \frac{\ln ۱ - x\ln x}{۱ - x} \Rightarrow \frac{-x\ln x}{۱-x} = ۱ + \ln \xi_x \leq ۱ \Rightarrow \ln x \geq \frac{x-۱}{x}.$$

توجه داریم که برای $x = ۱$ نامساوی‌های مطلوب به صورت تساوی برقرار می‌شوند. **(۳ نمره)** برای اثبات صحیح نامساوی.
با جایگذاری $x = \sqrt[n]{n}$ در نامساوی بدست آمده و با توجه به این‌که $\sqrt[n]{n} > ۱$ ، برای $n \geq ۲$، داریم:

$$\frac{\sqrt[n]{n} - ۱}{\sqrt[n]{n}} \leq \ln \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n} - ۱ \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt[n]{n}} \leq \frac{\ln \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n} - ۱} \leq ۱$$
$$\Rightarrow ۱ \leq \frac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n} - ۱) \leq \sqrt[n]{n}.$$

با توجه به نامساوی بالا، $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ۱$ و به کارگیری قضیه فشردگی می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n} - ۱) = ۱$ **(۲ نمره)**.

ب) ابتدا ثابت می‌کنیم که دنباله‌ی $\{\sqrt[n]{n}\}_{n=۱}^{\infty}$ برای $n \geq ۳$، نزولی است. برای $n \geq ۳$، داریم:

$$\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n \leq ۳ \leq n \Rightarrow \left(\frac{n+۱}{n}\right)^n \leq n \Rightarrow (n+۱)^n \leq n^{n+۱}$$
$$\Rightarrow (n+۱)^{\frac{۱}{n+۱}} \leq n^{\frac{۱}{n}} \Rightarrow \sqrt[n+۱]{n+۱} \leq \sqrt[n]{n}.$$

درنتیجه دنباله‌ی $\{(\sqrt[n]{n} - ۱)^\alpha\}$ برای $\alpha > ۰$ نزولی است. بعلاوه، $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n} - ۱)^\alpha = ۰$ برای هر $\alpha > ۰$. درنتیجه، با استفاده از آزمون لایپ نیتز برای سری‌های متناوب می‌توان نتیجه گرفت که سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}(\sqrt[n]{n} - ۱)^\alpha$ برای هر $\alpha > ۰$ همگراست **(۳ نمره)**.
با استفاده از نامساوی قسمت (آ) برای $x = \sqrt[n]{n}$، داریم:

$$\ln \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n} - ۱ \Rightarrow \left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha \leq (\sqrt[n]{n} - ۱)^\alpha, \qquad \forall \alpha > ۰.$$

با توجه به نامساوی بالا و واگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}((\ln n)/n)^\alpha$ برای $\alpha \in (۰, ۱]$، واگرایی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(\sqrt[n]{n} - ۱)^\alpha$ برای $\alpha \in (۰, ۱]$ نتیجه می‌شود. درنتیجه، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}(\sqrt[n]{n} - ۱)^\alpha$ برای $\alpha \in (۰, ۱]$ همگرای مشروط است **(۱ نمره)**.
مجددا با استفاده از نامساوی قسمت (آ) برای $x = \sqrt[n]{n}$، داریم:

$$\ln \sqrt[n]{n} \geq \frac{\sqrt[n]{n} - ۱}{\sqrt[n]{n}} \Rightarrow \sqrt[n]{n} - ۱ \leq \frac{\ln n}{n^{(۱-۱/n)}} \Rightarrow (\sqrt[n]{n} - ۱)^\alpha \leq \frac{(\ln n)^\alpha}{n^{\alpha - (\alpha/n)}}.$$

لذا، از همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^{\alpha-(\alpha/n)}}$ برای $\alpha > 1$، همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^\alpha$ برای $\alpha > 1$ نتیجه می‌شود. درنتیجه، سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt[n]{n}-1)^\alpha$ برای $\alpha \in (1,\infty)$ همگرای مطلق است **(۱ نمره)**.

ج) با در نظر گرفتن مجموع جزئی سری متناوب و همگرای مشروط

$$S=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}a_i, \qquad a_i=(\sqrt[i]{i}-1)^{\frac{1}{2}},$$

به صورت

$$S_n=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}a_i,$$

داریم $|S-S_n| \le |a_{n+1}|$، **(۳ نمره)**. بنابراین، باید n را به گونه‌ای بیابیم که $|a_{n+1}| < 10^{-3}$ **(۱ نمره)**. برای این منظور، توجه داریم که

$$\begin{aligned}
|a_{n+1}| < 10^{-3} \Leftrightarrow \sqrt[n]{n} < 10^{-6}+1 &\Leftrightarrow n < \left(1+10^{-6}\right)^n \\
&\Leftarrow n < 1 + 10^{-6}n + 10^{-12}\frac{n(n-1)}{2} \\
&\Leftrightarrow n < \left(1+10^{-6}n-\frac{10^{-12}}{2}n\right)+10^{-12}\frac{n^2}{2} \\
&\Leftarrow n < 10^{-12}\frac{n^2}{2} \\
&\Leftarrow n > 2\times 10^{12}.
\end{aligned}$$

درنتیجه، با انتخاب $n \ge N = 2\times 10^{12}$، خطا از 10^{-3} نابیشتر خواهد بود **(۱ نمره)**.

پاسخ سوال ۶

مطابق با پیوستگی تابع f روی بازه‌ی $[0,1]$، مشتق‌پذیری آن روی بازه‌ی $(0,1)$ و اینکه $f(0)=f(1)$، و با استفاده از قضیه رُل می‌توان نتیجه گرفت نقطه‌ی $c\in(0,1)$ وجود دارد که $f'(c)=0$ **(۴ نمره)**. از طرفی، مطابق با قضیه مقدار میانگین برای تابع f'، برای هر $x\in[0,1]$، نقطه‌ی ξ_x بین دو نقطه‌ی x و c چنان یافت می‌شود که

$$\begin{aligned}
f''(\xi_x)=\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{x-c}\right| = |f''(\xi_x)| < 1 &\Rightarrow |f'(x)| < |x-c| < 1 \\
&\Rightarrow |f'(x)| < 1,
\end{aligned}$$

(۶ نمره).

اشتباهات رایج:

- برای حل مساله برای یک تابع خاص مانند $f(x) = ax^2 + bx + c$ نمره‌ای داده نشده است.
- از این‌که برای نقطه‌ای در بازه مانند c، داشته باشیم $f'(c) = 0$، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که $|f'(x)| < 1$ برای هر $x \in [0, 1]$.