

## آزمون پایان ترم

مدرسین: دکتر جمالی، دکتر خانه‌دانی، دکتر رزوان، و دکتر رنجبر  
 زمان آزمون: ۲۱۰ دقیقه

## سوال ۱

انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

آ (۵ نمره)  $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ ،

ب (۵ نمره)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ .

## سوال ۲

(۱۰ نمره) سطح و حجم شیء سه‌بعدی که توسط معادلات زیر توصیف می‌شود را محاسبه کنید (a) ثابت مثبتی است).

$$x^2 + y^2 \leq a^2, \quad y^2 + z^2 \leq a^2.$$

## سوال ۳

سری توانی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-2}} x^{3n-2}$  را در نظر بگیرید.

آ (۵ نمره) به ازای چه مقادیری از  $x$ ، سری همگراست؟

ب (۵ نمره) سری را بر حسب نگاشت‌های مقدماتی محاسبه کنید.

ج (۲ نمره) مقدار  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-2}}$  را محاسبه کنید.

## سوال ۴

سری  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  و مجموع جزئی آن  $S_n$  را در نظر بگیرید.

آزمون پایان ترم

آ (۵ نمره) نشان دهید

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} < S < S_n + \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

ب (۳ نمره) بهترین  $N$  را بیابید که اگر به جای  $S$  از  $S_n$  برای  $n \geq N$  استفاده شود، خطا از  $10^{-3}$  ناپیشتتر باشد.

ج (۲ نمره) اگر به جای  $S$  از  $S_n + \frac{1}{4} \left( \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} + \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \right)$  استفاده شود،  $N$  را طوری بیابید که برای  $n \geq N$  خطا از  $10^{-3}$  ناپیشتتر باشد.

سوال ۵

آ (۵ نمره) ماکزیمم مطلق  $|x^n \ln x|$  را روی بازه  $[0, 1]$  محاسبه کنید، که  $n$  عدد صحیح مثبتی است.

ب (۵ نمره) با استفاده از قضیه تیلور، خطای حاصل از استفاده  $\int_0^1 \ln x \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} dx$  را بجای

$$\int_0^1 (e^x - 1) \ln x dx$$

محاسبه کنید، که  $n$  عدد صحیح مثبتی است.

ج (۳ نمره) انتگرال  $\int_0^1 (e^x - 1) \ln x dx$  را با تقریب  $10^{-4}$  محاسبه کنید.

سوال ۶

(۱۰ نمره) فرض کنید  $p$  عددی مثبت باشد. با استفاده از تکنیک‌های انتگرال ریمان نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

سوال ۷

(۱۰ نمره) تمامی اعداد مثبت  $p$  را چنان بیابید که انتگرال ناسره  $\int_0^1 \frac{dx}{\sin(x^p)}$  همگرا باشد (با شرح دقیق محاسبات).