

## سری پنجم تمرینات

## تمرین ۱

آ) به فرض تابع‌های  $y_1$  و  $y_2$  مجموعه‌ای اساسی از جواب‌های معادله  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$  را تشکیل بدهند که در آن  $p$  و  $q$  توابعی پیوسته هستند. ثابت کنید بین هر دو ریشه متوالی  $y_1$ ، یک و تنها یک ریشه از  $y_2$  وجود دارد.

ب) آیا معادله دیفرانسیل خطی و همگن از مرتبه دو وجود دارد که  $e^t$  و  $t^2 - 1$  جواب‌های آن باشند؟ اگر جواب مثبت است این مطلب چگونه با قسمت قبل در تناقض نمی‌باشد؟

## تمرین ۲

با تغییر متغیر مناسب ابتدا معادله زیر را به یک معادله خطی با ضرایب ثابت تبدیل کرده و سپس آن را حل کنید.

$$t^2 y'' + 2ty' - 6y = 0$$

## تمرین ۳

آ) در این مساله به دنبال تعیین شرایطی بر روی  $p$  و  $q$  در معادله  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$  هستیم که با تغییر متغیر مناسبی معادله به معادله‌ای با ضرایب ثابت تبدیل شود. فرض کنید  $x = u(t)$  متغیر مستقل جدیدی باشد که رابطه بین  $x$  و  $t$  بعداً مشخص می‌شود. تبدیل شده معادله دیفرانسیل اولیه را با استفاده از این تغییر متغیر به دست آورید.

ب) با فرض  $q(t) > 0$  سعی کنید در معادله جدید ضریب  $y$  را ثابت مثلاً یک بگیرید به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟ (یعنی برای برقراری این فرض چه عبارتی باید برقرار باشد؟)

ج) اگر  $q(t) < 0$  باشد این نتیجه چطور باید اصلاح شود؟

سری پنجم تمرینات

تمرین ۴

توابع  $y_1, \dots, y_n$  با دامنه  $\mathbb{R}$  داده شده‌اند به طوری که برای هر  $t \in \mathbb{R}$  داریم  $w(y_1, \dots, y_n)(t) \neq 0$ . آیا معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب پیوسته از مرتبه  $n$  وجود دارد بطوریکه توابع مذکور جواب‌های مستقل خطی آن باشند؟

تمرین ۵

آیا توابع مستقل خطی  $f_1, \dots, f_n$  با مشتق  $n - 1$  پیوسته وجود دارند بطوریکه برای هر  $t \in \mathbb{R}$  داشته باشیم:

$$w(y_1, \dots, y_n)(t) = 0$$

تمرین ۶

مساله مقدار اولیه

$$16y'' + 24y' + 9y = 0, \quad y(0) = a > 0, \quad y'(0) = 1$$

را در نظر بگیرید.

آ) مساله را حل کنید.

ب) مقدار بحرانی  $a$  را بیابید، که جواب‌هایی را که منفی می‌شوند از جواب‌های همواره مثبت جدا می‌کند.

تمرین ۷

ابتدا تحقیق کنید که  $y_1(t) = e^t$  یک جواب برای معادله  $(t^2 + 3)y'' + (1 - t)y' - 4y = 0$  می‌باشد. سپس جواب مستقل خطی دیگری را با استفاده از کاهش مرتبه پیدا کنید.