

## سری دهم تمرینات

## تمرین ۱

جواب دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} X$$

$$tX' = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X$$

## تمرین ۲

آ) برای دستگاه معادلات زیر نشان دهید ۲ مقدار ویژه با تکرار ۳ می‌باشد.

$$X' = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} X$$

ب) نشان دهید دستگاه فوق تنها یک جواب به شکل  $e^{rt}$  دارد که در آن  $r = 2$  می‌باشد.

ج) جواب دیگر را به صورت  $x = \xi te^{2t} + \eta e^{2t}$  فرض کنید و معادلات مربوط به این بردارها را از طریق جایگذاری این جواب در دستگاه معادلات به دست آورید.

د) قسمت قبل را برای جواب سوم به شکل  $x = \xi \left(\frac{t}{\sqrt{e}}\right) e^{2t} + \eta te^{2t} + \zeta e^{2t}$  انجام دهید.

ه) فرم جردن ماتریس  $A$  را با استفاده از فرمول  $J = T^{-1}AT$  محاسبه کنید که در آن  $T$  ماتریسی است که ستون‌های آن به ترتیب  $\xi$ ،  $\eta$  و  $\zeta$  می‌باشند.

تمرین ۳

آ) نشان دهید  $r = 1$  مقدار ویژه با تکرار ۳ برای دستگاه زیر است و این مقدار ویژه دو بردار ویژه مستقل خطی دارد.

$$X' = AX = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix} X$$

ب) برای به دست آوردن جواب سوم باید مانند سوال قبل عمل می‌کنیم با این تفاوت که باید از ترکیب خطی بردارهای ویژه استفاده کرد. نشان دهید این ترکیب خطی باید در یک تساوی صدق کنید و سپس جواب سوم را به دست آورید.

تمرین ۴

جواب عمومی دستگاه زیر را به دست آورید.

$$X' = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1} + 4 \end{bmatrix}, \quad t > 0$$