

توضیحاتی در مورد تمرینات تحویلی سری دوازدهم

• قسمت اول سوال با بیانی ساده می پرسد که دامنه تابع $g(x, y) = \text{Arctg}\left(\frac{y^3}{x}\right)$ چیست؟ به بیان دیگر، محاسبه این تابع در کدام نقاط (x, y) به مشکل برمیخورد؟ (پاسخ این قسمت کاملاً واضح است)

• همانطور که در قسمت اول سوال مشاهده می شود، محاسبه تابع در مجموعه ای از نقاط دچار مشکل می شود. حال قسمت دوم، این سوال را می پرسد که آیا می توان در این نقاطی که دچار مشکل هستند (به استثنای $(0, 0)$) تابع g را طوری تعریف کرد که تابع حاصل در نهایت تابعی پیوسته شود؟ به عبارت دیگر، اگر A مجموعه نقاطی باشد که در دامنه g قرار ندارند، آنگاه آیا می توان به هر عضو $a \in A$ عضو $f(a) \in \mathbb{R}$ را نظیر نمود به قسمی که تابع زیر یک تابع پیوسته روی $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ شود؟

$$h(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & \text{غروی دامنه} \\ f(x, y) & (x, y) \in A - \{(0, 0)\} \end{cases}$$

• با استفاده از توضیحات قسمت قبل، در قسمت سوم باید بررسی کنید که تابع ∇g را می توان بطور پیوسته روی $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ گسترش داد.

• برای قسمت آخر، به این نکات دقت کنید:

■ ابتدا اینکه می توان بررسی کرد که $F_{\uparrow} = F_{\downarrow} - F_{\downarrow}$. بنابراین محاسبه انتگرال ها صرفاً منوط به محاسبه انتگرال های میدان های F_{\downarrow} و F_{\uparrow} روی مسیرهای داده شده می باشد.

■ می توان بررسی کرد که F_{\downarrow} و F_{\uparrow} انتقال گرادیان g هستند. به عبارت دقیقتر، نشان دهید:

$$F_{\downarrow}(x, y) = \nabla g(x + 1, y) \quad , \quad F_{\uparrow}(x, y) = \nabla g(x - 1, y)$$