سری پنجم تمرین‌ها

درس ریاضی‌عمومی ۲

آبان‌ماه ۱۴۰۰

به نام آفریدگار یکتا

پرسش ۱ فرض کنید $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ یک تابع برداری هموار باشد (یعنی مولفه های آن بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد). همچنین فرض کنید $A(t)$ ماتریسی $n \times n$ باشد بطوریکه درایه‌های آن همگی توابعی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر نسبت به متغیر t باشد. فرض کنید $A'(t)$ ماتریسی $n \times n$ باشد که درایه‌های آن بر اثر مشتق‌گیری از درایه‌های ماتریس $A(t)$ بوجود آمده است. حال تابع برداری جدید $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ را با ضابطه زیر تعریف کنید:

$$\boxed{\alpha(t) = A(t)\gamma(t)}$$

نشان دهید مشتق α از طریق رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\boxed{\alpha'(t) = A'(t)\gamma(t) + A(t)\gamma'(t)}$$

آیا رابطه‌ای (مانند قاعده لایب نیتز) برای مشتقات α از هر مرتبه‌ای می‌توانید ارائه دهید؟

پرسش ۲ فرض کنید $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ یک تابع برداری هموار باشد.

- نشان دهید $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{du}{dt} \times \dfrac{d^2u}{dt^2}\right) = \dfrac{du}{dt} \times \dfrac{d^3u}{dt^3}$
- عبارت $\dfrac{d}{dt}\Big((u + u'') \bullet (u \times u')\Big)$ را تا حد امکان ساده کنید.

پرسش ۳ با ارائه مثال نقضی مناسب نشان دهید قضیه مقدار میانگین لزوما برای توابع برداری $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ که $n \geq 2$ ممکن است برقرار نباشد.

پرسش ۴ تابع برداری $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ را به قسمی بیابید که $\dfrac{du}{dt} = \vec{k} \times u$ و بعلاوه $u(0) = \vec{i} + \vec{k}$

توجه کنید که مسئله فوق واقعا یک معادله دیفرانسیل نیست و به راحتی می توان مسئله فوق را بررسی نمود. یک راه حل آن است که بنویسید:

$$\boxed{u(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}}$$

و بنابراین با جایگذاری داریم $x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = -y(t)\vec{i} + x(t)\vec{j}$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\boxed{x'(t) = -y(t) \qquad y'(t) = x(t) \qquad z'(t) = 0}$$

بنابراین $z(t) \equiv 1$. همچنین با توجه به شناخت اولیه از توابع مثلثاتی نشان دهید $x(t) = \cos t$ و $y(t) = \sin t$

پرسش ۵ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ ای باشد که پادمتقارن است. یعنی $A^{\mathrm{T}} = -A$. فرض کنید $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ تابعی برداری باشد که به ازای تمامی مقادیر $t \in \mathbb{R}$ در تساوی $\boxed{\gamma'(t) = A\gamma(t)}$ صدق کند. نشان دهید تصویر γ واقع بر کره ای به مرکز مبدا در $\mathbb{R}^n$ واقع است.