



پرسش ۱ فرض کنید $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ نگاشتی خطی است که توسط ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ داده شده است. نمودار T را بصورت زیرفضایی خطی از \mathbb{R}^{4+2} مشخص کنید. همچنین مجموعه‌های تراز متناظر با T را توصیف کنید.

پرسش ۲ فرض کنید $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ نگاشتی خطی است که توسط ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ داده شده است. نمودار T را بصورت زیرفضایی خطی از \mathbb{R}^{3+2} مشخص کنید. همچنین مجموعه‌های تراز T را با رسم شکل توصیف کنید.

پرسش ۳ فرض کنید تبدیلات خطی $T_1, T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ توسط ماتریس‌های $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ داده شده‌اند. نشان دهید به عنوان دو مجموعه $T_1(\mathbb{R}^2) = T_2(\mathbb{R}^2)$ و این در حالی است که به عنوان دو تابع $T_1 \neq T_2$.

پرسش ۴ تابع درجه دوم $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه زیر داده شده است:

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 2 + \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

با یک تغییر کج مناسب تابع f را بصورت مجموع یک عدد ثابت و تک جمله‌ای‌های درجه ۲ بازنویسی کنید و سپس نقطه‌ای از \mathbb{R}^2 که دارای خاصیت بیشینه سرتاسری یا کمینه سرتاسری یا نقطه زینی برای f است را بدست آورید

پرسش ۵ فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه زیر داده شده است:

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = -1 + \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

فرآیند مربوط به مسئله ۴ را برای تابع f انجام دهید. با تجزیه و تحلیل مجموعه‌های تراز متناظر با f مشخص کنید نمودار f به عنوان زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R}^3 نمایانگر چه شکل هندسی است.

پرسش ۶ فرآیند مربوط به پرسش ۴ را برای تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ که با ضابطه زیر تعریف شده است انجام دهید.

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = 3 + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

پرسش ۷ تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه زیر داده شده است:

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = 2 + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

از آنجایی که ماتریس مقارنی که تمام درایه‌هایش برابر با ۱ است ماتریسی تکین است (دترمینان آن برابر با صفر است) بنابراین نمی‌توان همانند مسائل ۴، ۵، ۶ تابع f را در کنج مناسبی بصورت جمع تک جمله‌ای‌های درجه ۲ بیان کرد و تعدادی تک جمله‌ای خطی نیز علاوه بر تک جمله‌ای‌های درجه دوم در این حالت ظاهر خواهند شد. تابع f را به فرم بیان شده در کنج مناسبی بیان کنید.

پرسش ۸ نشان دهید تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ که برای $x \neq y$ با ضابطه $f(x, y) = \frac{e^x - e^y}{x - y}$ و برای $x = y$ با ضابطه $f(x, x) = e^x$ تعریف شده است روی \mathbb{R}^2 پیوسته است.

پرسش ۹ ■ تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ برای $(x, y) \neq (0, 0)$ با ضابطه $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ تعریف شده و $f(0, 0) = 0$. آیا f تابعی پیوسته است؟

■ تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ برای $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ با ضابطه $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$ تعریف شده است. همچنین $f(0, 0, 0) = 0$. آیا f تابعی پیوسته است؟

پرسش ۱۰ فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}^n$ زیرمجموعه متشکل از تمامی n تایی‌های مرتبی باشد که تمامی مولفه‌های آنها اعداد گویا باشند. تابع $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را با این ضابطه در نظر بگیرید: هرگاه $(x_1, \dots, x_n) \in A$ آنگاه $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$ و هرگاه $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n - A$ آنگاه $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. تابع f در چه نقاطی از \mathbb{R}^n پیوسته است؟