سری دهم تمرین‌ها

درس ریاضی‌عمومی ۲

آذرماه ۱۴۰۰

به نام آفریدگار یکتا

پرسش ۱ فرض کنید $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y)=x^۳+y^۳-۳xy$ تعریف شده باشد. نقاط بحرانی f را یافته و با استفاده از آزمون مشتق دوم، این نقاط را رده بندی کنید.

پرسش ۲ فرض کنید $f:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y,z)=۴xyz-x^۴-y^۴-z^۴$ داده شده باشد. نشان دهید نقطه $(x,y,z)=(۱,۱,۱)$ یک نقطه بحرانی f است. با استفاده از آزمون مشتق دوم، نوع این نقطه را مشخص کنید.

پرسش ۳ فرض کنید $i=۱,۲$ و C_i فصل مشترک کره به مرکز مبدا و شعاع R_i با ابرصفحه مشخص شده با بردار نرمال A_i در $\mathbb{R}^n$ باشد. فرض کنید بردارهای $A_۱,A_۲$ مستقل خطی باشند. همچنین فرض کنید $X\in C_۱$ و $Y\in C_۲$ به قسمی باشند که $\left|\left|X-Y\right|\right|$ کمترین مقدار ممکن (یا بیشترین مقدار ممکن) باشد. نشان دهید لزوما یکی از دو حالت زیر باید برقرار باشد:

- یا هر دوی X,Y واقع در زیرفضای خطی تولید شده توسط $A_۱,A_۲$ هستند.
- یا $Y=\frac{R_۲}{R_۱}X$

پرسش ۴ اعداد مثبت $d_۱,d_۲,d_۳$ داده شده‌اند. قرار دهید:

$$\Delta:=\det\begin{bmatrix}x_{۱۱}&x_{۱۲}&x_{۱۳}\\x_{۲۱}&x_{۲۲}&x_{۲۳}\\x_{۳۱}&x_{۳۲}&x_{۳۳}\end{bmatrix}$$

همچنین فرض کنید:

$$x_{۱۱}^۲+x_{۱۲}^۲+x_{۱۳}^۲=d_۱^۲,\qquad x_{۲۱}^۲+x_{۲۲}^۲+x_{۲۳}^۲=d_۲^۲,\qquad x_{۳۱}^۲+x_{۳۲}^۲+x_{۳۳}^۲=d_۳^۲$$

نشان دهید $\left|\Delta\right|\leq d_۱d_۲d_۳$ (این حالت خاصی از قضیه‌ای مشهور، منسوب به آدامارد، می‌باشد)

پرسش ۵ حاصل هرکدام از انتگرال های زیر را بدست آورید:

- $\iint_T\sqrt{a^۲-y^۲}dA$ که در آن T درون مثلثی با رئوس $(۰,۰)$ و $(a,۰)$ و (a,a) در $\mathbb{R}^۲$ است.
- $\iint_D\ln x\,dA$ که در آن D ناحیه‌ای کران‌دار در ربع اول در $\mathbb{R}^۲$ است که توسط خط $۲x+۲y=۵$ و هذلولی $xy=۱$ محصور شده است.

پرسش ۶ حاصل هریک از انتگرال های مکرر زیر را محاسبه کنید.

- $\int_{۰}^{\pi/۲} dy \int_{y}^{\pi/۲} \frac{\sin x}{x}\, dx$
- $\int_{۰}^{۱} dx \int_{x}^{x^{۱/۳}} \sqrt{۱-y^{۴}}\, dy$

پرسش ۷ با استفاده از روابط مربوط به تعویض متغیر در انتگرال های دوگانه، حاصل هرکدام از انتگرال های زیر را بدست آورید:

- $\iint_T \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$ که در آن T ناحیه محصور در مثلث با رئوس $(۰,۰)$ و $(۰,۱)$ و $(۱,۰)$ است.
- $\iint_{|x|+|y|\leq a} \exp(x+y)\, dA$

پرسش ۸ با استفاده از مختصات قطبی، حاصل انتگرال $\iint_Q (x+y)\, dA$ را بدست آورید که در آن، Q ناحیه ای در ربع اول مختصات درون دیسک $x^{۲}+y^{۲}\leq a^{۲}$ و پایین خط $y=\sqrt{۳}x$ است.