

با یاد او

سری نهم تمرین‌های ریاضی عمومی یک

مسئله ۱. تمرین ۱۴ مسائل بخش دوم فصل ۵ کتاب آدامز: به کمک اتحاد $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ، مساحت زیر نمودار $y = x^3$ و بالای محور x ‌ها را بین دو خط قائم $x = 0$ و $x = b > 0$ ، محاسبه کنید.

مسئله ۲. تمرینات ۱۶ تا ۱۹ مسائل بخش دوم فصل ۵ کتاب آدامز: مجموع S_n ‌های داده شده در زیر را به عنوان مجموع مساحت مستطیل‌های تقریب زنده مساحت یک ناحیه خاص از صفحه دو بعدی تفسیر کنید، و مقدار $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ را به دست آورید.

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{2n+3i}{n^2} \quad (\text{ج}) \quad S_n = \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \quad (\text{ا})$$

$$S_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{j}{n}\right)^2} \quad (\text{د}) \quad S_n = \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \left(1 - \frac{2i}{n}\right) \quad (\text{ب})$$

مسئله ۳. تمرینات ۱ تا ۶ مسائل بخش سوم فصل ۵ کتاب آدامز: فرض کنید P_n نشان دهنده افراز بازه $[a, b]$ به n زیربازه با طول برابر با $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ باشد. مجموع پایینی $L(f, P_n)$ و مجموع بالایی $U(f, P_n)$ را برای هر کدام از توابع داده شده، و با n داده شده محاسبه کنید.

$$f(x) = x \quad \text{با بازه } [0, 2], \quad n = 8 \quad (\text{ا}) \quad f(x) = \ln x \quad \text{روی بازه } [1, 2], \quad n = 5 \quad (\text{د})$$

$$f(x) = x^2 \quad \text{روی بازه } [0, 4], \quad n = 4 \quad (\text{ب}) \quad f(x) = \sin x \quad \text{روی بازه } [0, \pi], \quad n = 6 \quad (\text{ه})$$

$$f(x) = e^x \quad \text{روی بازه } [-2, 2], \quad n = 4 \quad (\text{ج}) \quad f(x) = \cos x \quad \text{روی بازه } [0, 2\pi], \quad n = 4 \quad (\text{و})$$

مسئله ۴. تمرینات ۷ تا ۱۰ مسائل بخش سوم فصل ۵ کتاب آدامز: فرض کنید P_n نشان دهنده افراز بازه $[a, b]$ به n زیربازه با طول برابر با $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ باشد. مجموع پایینی $L(f, P_n)$ و مجموع بالایی $U(f, P_n)$ را برای هر کدام از توابع داده شده، و روی بازه‌های داده شده، محاسبه کنید. سپس نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U(f, P_n),$$

و از آن نتیجه بگیرید که توابع داده شده روی بازه $[a, b]$ (ریمان) انتگرال پذیر هستند. همچنین مقدار $\int_a^b f(x) dx$ را نیز مشخص کنید.

الف) $f(x) = x$ روی بازه $[a, b] = [0, 1]$ (الف) ج) $f(x) = x^3$ روی بازه $[a, b] = [0, 1]$

ب) $f(x) = 1 - x$ روی بازه $[a, b] = [0, 2]$ (ب) د) $f(x) = e^x$ روی بازه $[a, b] = [0, 3]$

مسئله ۵. تمرینات ۱۱ تا ۱۶ مسائل بخش سوم فصل ۵ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، مقدار حد داده شده را به صورت یک انتگرال بیان کنید.

الف) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i}{n}}$ (الف) د) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right)$

ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{\frac{i-1}{n}}$ (ب) ه) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \tan^{-1}\left(\frac{i-1}{n}\right)$

ج) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi}{n} \sin\left(\frac{\pi i}{n}\right)$ (ج) و) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2}$

مسئله ۶. تمرینات ۳ تا ۱۶ مسائل بخش چهارم فصل ۵ کتاب آدامز: به کمک خواص انتگرال معین و تعبیر انتگرال‌ها به صورت مساحت، هر کدام از موارد داده شده زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{-2}^2 (x+2) dx$ (الف) ح) $\int_{-a}^a (a - |s|) ds$

ب) $\int_0^2 (3x+1) dx$ (ب) ط) $\int_{-1}^1 (u^5 - 3u^3 + \pi) du$

ج) $\int_a^b x dx$ (ج) ی) $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2} dx$

د) $\int_{-1}^2 (1-2x) dx$ (د) ک) $\int_{-4}^4 (e^x - e^{-x}) dx$

ه) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2} dt$ (ه) ل) $\int_{-3}^3 (2+t)\sqrt{9-t^2} dt$

و) $\int_{-\sqrt{2}}^0 \sqrt{2-x^2} dx$ (و) م) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$

ز) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^3) dx$ (ز) ن) $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$

مسئله ۷. تمرین ۳۶ مسائل بخش چهارم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه

$$\int_0^3 |2-x| dx.$$

مسئله ۸. تمرین ۳۷ مسائل بخش چهارم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} \operatorname{sgn}(x-1) dx.$$

مسئله ۹. تمرینات ۳۹ و ۴۰ مسائل بخش چهارم فصل ۵ کتاب آدامز: به کمک رسم نمودار توابع زیر انتگرال،

مقدار انتگرال هر کدام از موارد داده شده زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^3 \frac{x^2-x}{|x-1|} dx \quad \text{ب) } \int_{-3}^4 (|x+1| - |x-1| + |x+2|) dx \quad \text{ا)$$

مسئله ۱۰. تمرینات ۱ تا ۲۰ مسائل بخش پنجم فصل ۵ کتاب آدامز: مقدار انتگرال‌های معین زیر را حساب کنید.

$$\int_0^2 x^3 dx \quad \text{ا) } \int_{-\pi/4}^{-\pi/6} \cos x dx \quad \text{ط)$$

$$\int_0^4 \sqrt{x} dx \quad \text{ب) } \int_0^{\pi/3} \sec^2 \theta d\theta \quad \text{ی)$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad \text{ج) } \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin \theta d\theta \quad \text{ک)$$

$$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx \quad \text{د) } \int_0^{2\pi} (1 + \sin u) du \quad \text{ل)$$

$$\int_{-1}^2 (3x^2 - 4x + 2) dx \quad \text{ه) } \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx \quad \text{م)$$

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x^3} - \frac{x^3}{2} \right) dx \quad \text{و) } \int_{-2}^2 (e^x - e^{-x}) dx \quad \text{ن)$$

$$\int_{-2}^2 (x^2 + 3)^2 dx \quad \text{ز) } \int_0^e a^x dx \quad (a > 0) \quad \text{س)$$

$$\int_4^9 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad \text{ح) } \int_{-1}^1 2^x dx \quad \text{ع)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \quad (\text{ق})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad (\text{ف})$$

$$\int_{-2}^0 \frac{dx}{4+x^2} \quad (\text{ر})$$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{ص})$$

مسئله ۱۱. تمرین ۲۵ مسائل بخش پنجم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مساحت محصور بین نمودارهای $y = x^2 - 3x + 3$ و $y = 1$.

مسئله ۱۲. تمرین ۲۸ مسائل بخش پنجم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مساحت قسمت بالایی نمودار $y = |x|$ و پایین نمودار $y = 12 - x^2$.

مسئله ۱۳. تمرینات ۳۹ تا ۴۶ مسائل بخش پنجم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه مشتق‌های داده شد زیر.

$$\frac{d}{dt} \int_{-\pi}^t \frac{\cos y}{1+y^2} dy \quad (\text{ه})$$

$$\frac{d}{dx} \int_2^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (\text{ا})$$

$$\frac{d}{d\theta} \int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{1}{1-x^2} dx \quad (\text{و})$$

$$\frac{d}{dt} \int_t^3 \frac{\sin x}{x} dx \quad (\text{ب})$$

$$F(t) = \int_0^t \cos(x^2) dx \quad \text{اگر } \frac{d}{dx} F(\sqrt{x}) \quad (\text{ز})$$

$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 \frac{\sin t}{t} dt \quad (\text{ج})$$

$$H(x) = 3x \int_4^{x^2} e^{-\sqrt{t}} dt \quad \text{اگر } H'(2) \quad (\text{ح})$$

$$\frac{d}{dx} x^2 \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{u} du \quad (\text{د})$$

مسئله ۱۴. تمرینات ۵۱ مسائل بخش پنجم فصل ۵ کتاب آدامز: آیا تابع زیر ماکسیمم و مینیمم دارد؟ آنها را بیابید.

$$F(x) = \int_0^{2x-x^2} \cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt.$$

مسئله ۱۵. تمرینات ۵۲ تا ۵۴ مسائل بخش پنجم فصل ۵ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه حدهای زیر.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^5 + \dots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^5 \right) \quad (\text{ا})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right) \quad (\text{ج})$$