

# با یاد او

## سری هشتم تمرین‌های ریاضی عمومی یک

**مسئله ۱.** تمرینات ۱۵ تا ۲۲ مسائل بخش نهم فصل ۴ کتاب آدامز: با انجام یک خطی‌سازی مناسب برای یک تابع در اطراف نقطه‌ای مطلوب، در هر کدام از موارد زیر، مقدار تقریبی اعداد داده شده، علامت خطای تقریب، مقدار خطای تقریب، و بازه‌ای که حتماً مقدار (واقعی) این اعداد در آن قرار دارد را بیابید.

$$\begin{array}{llll} \text{آ} \quad \sqrt{5}^\circ & \text{ب} \quad \sqrt{47} & \text{ج} \quad \sqrt[4]{185} & \text{د} \quad \frac{1}{2003} \\ \text{ه} \quad \cos(46) & \text{و} \quad \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) & \text{ز} \quad \sin(314) & \text{ح} \quad \sin(33) \end{array}$$

**مسئله ۲.** تمرین ۳۰ مسائل بخش نهم فصل ۴ کتاب آدامز: نشان دهید تقریب خطی تابع  $\sin \theta$  در نقطه  $\theta = 0^\circ$ ، تابع  $L(\theta) = \theta$  می‌باشد. حداکثر درصد خطا در تقریب  $\sin \theta \approx \theta$  چقدر می‌تواند باشد، وقتی که  $|\theta|$  کمتر از ۱۷ باشد.

**مسئله ۳.** تمرینات ۲، ۴ تا ۸ مسائل بخش دهم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، چند جمله‌ای تیلور توابع داده شده را، حول نقاط مطرح شده، و تا مرتبه گفته شده، بیابید.

$$\begin{array}{l} \text{آ} \quad \cos x \text{ حول نقطه } x = \frac{\pi}{4}, \text{ تا مرتبه } 3. \\ \text{ب} \quad \sec x \text{ حول نقطه } x = 0, \text{ تا مرتبه } 3. \\ \text{ج} \quad \sqrt{x} \text{ حول نقطه } x = 4, \text{ تا مرتبه } 3. \\ \text{د} \quad \frac{1}{1-x} \text{ حول نقطه } x = 0, \text{ تا مرتبه } n. \\ \text{ه} \quad \frac{1}{2+x} \text{ حول نقطه } x = 1, \text{ تا مرتبه } n. \\ \text{و} \quad \sin(2x) \text{ حول نقطه } x = \frac{\pi}{4}, \text{ تا مرتبه } 2n-1. \end{array}$$

**مسئله ۴.** تمرینات ۲۳ تا ۲۶ مسائل بخش دهم فصل ۴ کتاب آدامز: به کمک چند جمله‌ای تیلور یا مکلورن توابع شناخته شده، و با تغییر متغیر مناسب، و محاسبات لازم، موارد زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{l} \text{آ} \quad \text{چند جمله‌ای تیلور } \sin^2 x \text{ تا مرتبه } 4, \text{ حول نقطه } x = 0. \text{ (راهنمایی: } \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \text{).} \\ \text{ب} \quad \text{چند جمله‌ای تیلور } \sin x \text{ تا مرتبه } 5, \text{ حول نقطه } x = \pi. \end{array}$$

ج) چند جمله‌ای تیلور  $\frac{1}{1+2x^2}$  تا مرتبه ۶، حول نقطه  $x = 0$ .

د) چند جمله‌ای تیلور  $\cos(3x - \pi)$  تا مرتبه ۸، حول نقطه  $x = 0$ .

**مسئله ۵.** تمرین شماره ۱۶ مسائل مروری بخش مروری فصل ۴ کتاب آدامز: به کمک بسط تیلور  $\sin^2 x$  تا مرتبه ۶، حول نقطه  $x = 0$ ، مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 x - 3x^2 + x^4}{x^6}.$$

**مسئله ۶.** فرض کنید  $h > 0$  یک عدد ثابت باشد. نشان دهید تابعی مانند  $f$  وجود ندارد به طوری که  $f'(x)$  برای هر  $x \geq 0$  موجود،  $f'(0) = 0$  و  $f'(x) \geq h$  برای  $x > 0$ . (راهنمایی: به برهان خلف فرض کنید چنین  $f$  وجود دارد. حال تعریف  $f'(0)$  را به کمک تعریف  $\epsilon$  و  $\delta$  ای حد، و برای  $\epsilon = \frac{h}{2}$  در نظر بگیرید. پس نتیجه می‌شود که برای این  $\epsilon$ ، یک  $\delta$  وجود دارد به طوری که برای هر  $0 < |x - 0| < \delta$  داریم

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| < \frac{h}{2}.$$

حال روی بازه  $\left[0, \frac{\delta}{2}\right]$  قضیه مقدار میانگین را برای تابع  $f$  به کار ببرید و به تناقض برسید.

**مسئله ۷.** فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی است که  $f(x) \leq 0$  برای هر  $x$ ، و  $f''(x) \geq 0$  برای هر  $x$ . نشان دهید  $f$  تابعی ثابت است. (راهنمایی: چند جمله‌ای تیلور بنویسید.)

**مسئله ۸.** تمرینات ۹ تا ۱۶ مسائل بخش نهم فصل ۲ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، معادله خط مماس بر منحنی داده شده را، در نقطه مشخص شده، بیابید.

ا)  $2x^2 + 3y^2 = 5$  در نقطه  $(1, 1)$ .

ب)  $x^2y^3 - x^3y^2 = 12$  در نقطه  $(-1, 2)$ .

ج)  $\frac{x}{y} + \frac{y^3}{x^3} = 2$  در نقطه  $(-1, -1)$ .

د)  $x + 2y + 1 = \frac{y^2}{x-1}$  در نقطه  $(2, -1)$ .

ه)  $2x + y - \sqrt{2} \sin(xy) = \frac{\pi}{2}$  در نقطه  $(\frac{\pi}{4}, 1)$ .

و)  $\tan(xy^2) = \frac{2xy}{\pi}$  در نقطه  $(-\pi, \frac{1}{2})$ .

ز)  $x \sin(xy - y^2) = x^2 - 1$  در نقطه  $(1, 1)$ .

ح)  $\cos\left(\frac{\pi y}{x}\right) = \frac{x^2}{y} - \frac{17}{2}$  در نقطه  $(3, 1)$ .

**مسئله ۹.** تمرین ۲۷ مسائل بخش نهم فصل ۲ کتاب آدامز: نشان دهید که زاویه ایجاد شده در محل تلاقی بیضی

$$x^2 + 2y^2 = 2 \text{ و } x^2 - 2y^2 = 1 \text{، زاویه ای قائمه است.}$$

**مسئله ۱۰.** تمرین ۱۵ مسائل بخش اول فصل ۴ کتاب آدامز: نقطه  $P$  به گونه ای حرکت می کند که در زمان  $t$ ، در محل تقاطع

منحنی های  $xy = t$  و  $y = tx^2$  قرار دارد. نرخ تغییر فاصله  $P$  از مبدأ، در لحظه  $t = 2$ ، چقدر است؟

**مسئله ۱۱.** تمرین شماره ۷ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۴ کتاب آدامز: بزرگترین مساحت یک مثلث قائم الزاویه را

پیدا کنید، وقتی که محیط آن  $P$  باشد.

**مسئله ۱۲.** تمرین ۱۳ مسائل بخش دهم فصل ۴ کتاب آدامز: چند جمله ای تیلور مرتبه دوم تابع  $e^x$  را حول نقطه  $x = 0$

بیابید، و به کمک آن، تقریبی از مقدار  $e^{-0.5}$  را به دست آورید. علامت خطا و مقدار خطای تقریب را نیز محاسبه

کنید. همچنین کوچک ترین بازه ای را که حتماً مطمئن شویم عدد داده شده در آن قرار دارد را مشخص کنید.

**مسئله ۱۳.** تمرین ۳۰ مسائل بخش دهم فصل ۴ کتاب آدامز: با ترکیب مناسب چند جمله ای ملکورن  $\ln(1+x)$  و

چند جمله ای ملکورن  $\ln(1-x)$ ، چند جمله ای ملکورن مرتبه  $2n+1$  تابع

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

را بیابید.