

با یاد او

سری هفتم تمرین‌های ریاضی عمومی یک

مسئله ۱. تمرین شماره ۷ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۴ کتاب آدامز: بزرگترین مساحت یک مثلث قائم الزاویه را پیدا کنید، وقتی که محیط آن P باشد.

مسئله ۲. تمرینات ۳۲ تا ۳۵ مسائل بخش چهارم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، برای تابع داده شده (روی دامنه خود)، مکان اکسترم‌های موضعی و نوع آنها را مشخص کنید. همچنین مشخص کنید کدام یک از اکسترم‌های موضعی، مطلق نیز می‌باشند.

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (آ)$$

$$f(x) = x^2 e^{-x^2} \quad (ج)$$

$$f(x) = x^{2-x} \quad (ب)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (د)$$

مسئله ۳. تمرینات ۱۶ تا ۲۰ مسائل بخش پنجم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، بازه‌هایی که توابع داده شده روی آنها، محدب و یا مقعر هستند را مشخص، و همچنین مکان نقاط عطف را نیز تعیین کنید.

$$f(x) = xe^x \quad (آ)$$

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad (د)$$

$$f(x) = e^{-x^2} \quad (ب)$$

$$f(x) = (\ln x)^2 \quad (ه)$$

$$f(x) = \frac{\ln x^2}{x} \quad (ج)$$

مسئله ۴. تمرینات ۲۸، ۳۰ و ۳۱ مسائل بخش پنجم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، در صورت امکان، به کمک آزمون مشتق مرتبه دوم، نوع نقاط بحرانی را تعیین کنید.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} \quad (آ)$$

$$f(x) = xe^x \quad (ب)$$

$$f(x) = x \ln x \quad (ج)$$

مسئله ۵. تمرینات ۱ و ۳ مسائل بخش دهم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، چندجمله‌ای تیلور توابع داده شده را، حول نقاط مطرح شده، و تا مرتبه گفته شده، بیابید.

$$e^x \quad (آ) \quad \text{حول نقطه } x = 0, \text{ تا مرتبه } 4.$$

$$\ln x \quad (ب) \quad \text{حول نقطه } x = 2, \text{ تا مرتبه } 4.$$

مسئله ۶. نشان دهید اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق پذیر و $f'(x) > f(x)$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، و به علاوه در یک نقطه مثل x_0 داشته باشیم $f(x_0) = 0$ ، آن گاه $f(x) > 0$ برای هر $x > x_0$. (راهنمایی: تابع $g(x) = e^{-x}f(x)$ را در نظر بگیرید و توجه کنید که $g'(x) > 0$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $g(x_0) = 0$.)

مسئله ۷. فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که روی $(0, 1)$ دو بار مشتق پذیر است، و $f'' + 2f' + f \geq 0$. اگر $f(0) = f(1) = 0$ ، نشان دهید برای هر $x \in [0, 1]$ داریم $f(x) \leq 0$. (راهنمایی: تابع $g(x) = e^x f(x)$ را در نظر بگیرید و از محدب بودن g بهره بگیرید.)

مسئله ۸. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق مرتبه ۴ پیوسته، و کران دار دارد و همچنین عدد a وجود دارد به طوری که $f''(a) = 0$. نشان دهید برای هر $h \in \mathbb{R}$ داریم:

$$|f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)| \leq \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} |f''''(x)|}{12} h^4.$$

(راهنمایی: چند جمله ای تیلور مرتبه ۳، به همراه باقیمانده آن، بنویسید.)

مسئله ۹. تمرین ۴۹ مسائل بخش چهارم فصل ۴ کتاب آدامز: تابع با ضابطه زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

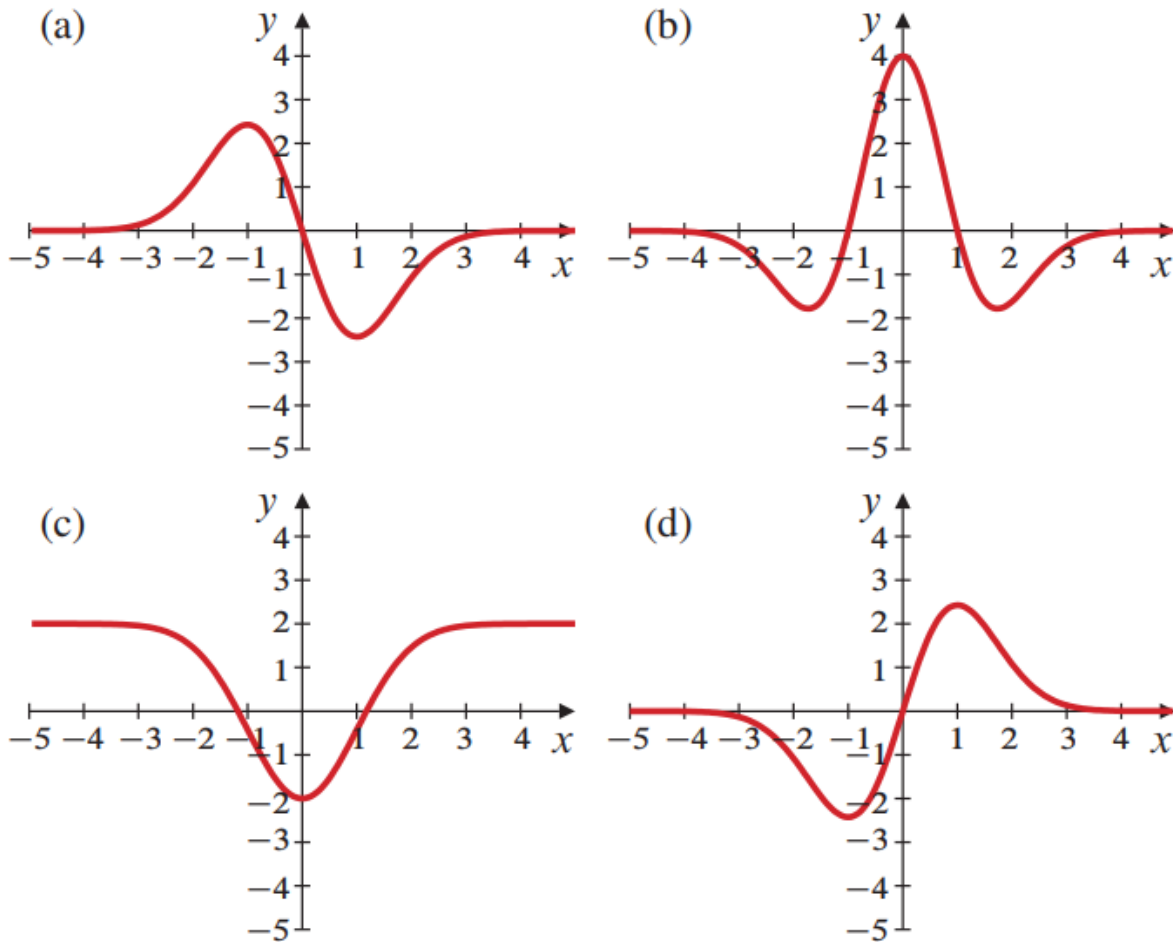
نشان دهید f روی بازه $[0, +\infty)$ پیوسته، و روی بازه $(0, +\infty)$ مشتق پذیر است، اما نقطه $x = 0$ نه مینیمم موضعی و نه ماکسیمم موضعی است.

مسئله ۱۰. تمرینات ۲۴ تا ۲۷، ۲۹، ۳۲ و ۳۳ مسائل بخش پنجم فصل ۴ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، در صورت امکان، به کمک آزمون مشتق مرتبه دوم، نوع نقاط بحرانی را تعیین کنید.

$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ (ه)	$f(x) = 3x^3 - 36x - 3$ (ا)
$f(x) = (x^2 - 4)^2$ (و)	$f(x) = x(x-2)^2 + 1$ (ب)
$f(x) = (x^2 - 4)^3$ (ز)	$f(x) = x + \frac{4}{x}$ (ج)
	$f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ (د)

مسئله ۱.۱. تمرین ۳۸ مسائل بخش پنجم فصل ۴ کتاب آدامز: نشان دهید نمودار تابع $y = f(x)$ ، خط مماس خود را در نقطه عطف قطع می‌کند. (راهنمایی: حالت‌هایی که خط مماس، عمودی و غیر عمودی است را جداگانه بررسی کنید.)

مسئله ۱.۲. تمرینات ۱ و ۲ مسائل بخش ششم فصل ۴ کتاب آدامز: نمودارهای شکل زیر، نمودارهای توابع f ، f' ، f'' و g هستند. مشخص کنید کدام نمودارها مربوط به کدام یکی از توابع یاد شده است؟



همچنین برای توابع مربوط به هر کدام از نمودارهای شکل فوق، هر اطلاعاتی (مانند تقارن تابع، رفتار مجانبی تابع، بازه‌های صعودی و یا نزولی بودن تابع، نقاط بحرانی تابع، نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع، فواصل تقعر و یا تحدب تابع، نقاط عطف تابع و ...) را به صورت تقریبی مشخص کنید.

مسئله ۱.۳. تمرینات ۳ و ۴ مسائل بخش ششم فصل ۴ کتاب آدامز: نمودارهای شکل زیر، نمودارهای توابع $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ ، $g(x) = \frac{x^3}{1-x^4}$ ، $h(x) = \frac{x^3-x}{\sqrt{x^6+1}}$ و $k(x) = \frac{x^3}{\sqrt{|x^4-1|}}$ هستند. مشخص کنید، کدام نمودار مربوط به کدام تابع فوق است.

همچنین برای توابع مربوط به هر کدام از نمودارهای شکل فوق، هر اطلاعاتی (مانند تقارن تابع، رفتار مجانبی تابع، بازه‌های صعودی و یا نزولی بودن تابع، نقاط بحرانی تابع، نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع، فواصل تقعر و یا تحدب تابع، نقاط عطف تابع و ...) را به صورت تقریبی مشخص کنید.

