

با یاد او

سری پنجم تمرین‌های ریاضی عمومی یک

مسئله ۱. مشابه تمرین شماره ۱۱ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز: فرض کنید f یک تابع پیوسته روی بازه

$[0, 1]$ و $f(0) = f(1)$ باشد. نشان دهید حداقل یک $0 \leq a \leq \frac{2}{3}$ وجود دارد به طوری که $f(a) = f(a + \frac{1}{3})$.

(راهنمایی: قضیه مقدار بینی را برای $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{3})$ به کار ببرید.)

مسئله ۲. تمرین ۲۶ مسائل بخش دوم فصل ۲ کتاب آدامز: آیا به ازای یک عدد حقیقی c ، تابع

$$f_c(x) = \begin{cases} x|x| & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

می‌تواند در مبدأ مشتق‌پذیر باشد؟

مسئله ۳. فرض کنید $f''(x)$ روی \mathbb{R} موجود و پیوسته باشد و به علاوه برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $|f''(x)| \leq K$. نشان دهید

$$\left| \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \right| \leq K.$$

مسئله ۴. فرض کنید f در همسایگی x تعریف شده و $f''(x)$ موجود باشد. نشان دهید

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

نشان دهید $f(x) = x|x|$ در $x = 0$ دو بار مشتق‌پذیر نیست ولی مقدار حد فوق وجود دارد.

مسئله ۵. مشابه تمرینات ۱۸ و ۲۰ مسائل بخش هشتم فصل ۲ کتاب آدامز: تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(آ) نشان دهید f در مبدأ مشتق‌پذیر است و $f'(0) = 0$.

(ب) نشان دهید تابع مشتق، یعنی f' ، در مبدأ پیوسته نیست.

(ج) نشان دهید f در هیچ همسایگی حول مبدأ صعودی نیست و در نتیجه در هیچ همسایگی حول مبدأ، f' نمی‌تواند مثبت باشد.

مسئله ۶. تمرین شماره ۷ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۲ کتاب آدامز: فرض کنید f در مبدأ مشتق‌پذیر باشد و در

رابطه $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ، برای هر x و y صدق کند. نشان دهید

$$f(x) = f'(0)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

مسئله ۷. تمرین شماره ۸ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۲ کتاب آدامز:

(آ) فرض کنید f در x مشتق پذیر باشد. نشان دهید

$$(i) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x),$$

$$(ii) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x).$$

(ب) نشان دهید وجود حد (i) در فوق، مشتق پذیری تابع f را در نقطه x نتیجه می دهد.

(ج) نشان دهید وجود حد (ii) در فوق، مشتق پذیری تابع f را در نقطه x نتیجه نمی دهد. مثلاً تابع $f(x) = |x|$ را در مبدأ در نظر بگیرید.

مسئله ۸. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مثل بزیند که فقط و فقط در تعدادی متناهی نقطه مشتق پذیر باشد.

مسئله ۹. فرض کنید $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته، $f(0) = 0$ ، برای هر $x > 0$ موجود، و f' روی $(0, +\infty)$ صعودی باشد. نشان دهید $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ صعودی است.