

# با یاد او

## سری چهارم تمرین‌های ریاضی عمومی یک

**مسئله ۱.** نشان دهید تابع

$$f_c(x) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{2}x}{x} & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$

فقط در صورتی در مبدأ پیوسته است که  $c = \sqrt{2}$  باشد.

**مسئله ۲.** نشان دهید تابع  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$  یک توابع پیوسته در نقطه  $x = 1$  دارد و آن توابع را مشخص کنید.

**مسئله ۳.** نشان دهید اگر تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  در  $x_0$  پیوسته و  $f(x_0) \neq 0$  باشد، آنگاه  $f$  در یک همسایگی حول  $x_0$  یک علامت دارد، یعنی یا مثبت است و یا منفی. (منظور از یک همسایگی حول  $x_0$ ، یعنی مجموعه همه  $x$ هایی به صورت  $|x - x_0| < \delta$  برای یک  $\delta > 0$ ).

**مسئله ۴.** تمرین شماره ۹ مسائل چالشی بخش مروری فصل ۱ کتاب آدامز: تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x^2 - 1|}$  را در نظر بگیرید. همه نقاطی که  $f$  در آنها پیوسته نیست را بیابید. آیا در این نقاط حد چپ یا راست دارد؟ در صورت وجود آنها را بیابید.

**مسئله ۵.** گوئیم توابع  $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  در نقطه  $c \in (a, b)$  بر هم مماس هستند در صورتی که

$$f(c) = g(c), \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - g(x)}{x - c} = 0.$$

نشان دهید  $f$  در  $x = c$  مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر خط راست (غیر قائم)، به معادله  $l(x) = mx + b$  موجود باشد که  $f, l$  در  $x = c$  بر هم مماس باشند.