

با یاد او

سری دوازدهم تمرین‌های ریاضی عمومی یک

مسئله ۱. تمرین ۳۵ مسائل بخش سوم فصل ۹ کتاب آدامز: به کمک آزمون انتگرال، نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ همگرا است. همچنین نشان دهید مقدار همگرایی سری کمتر از $\frac{\pi}{4}$ است.

مسئله ۲. تمرین ۴۲ مسائل بخش سوم فصل ۹ کتاب آدامز: نشان دهید سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ واگرا است. (راهنمایی: نشان دهید $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \geq \frac{1}{2n}$)

مسئله ۳. تمرینات ۱۷ تا ۲۴ مسائل بخش چهارم فصل ۹ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، به ازای چه مقادیری از x ، مجموع‌های داده شده همگرایی مطلق، همگرایی مشروط و یا واگرا هستند.

| | |
|--|---|
| (ا) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \ln n}$ | (آ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ |
| (ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^3}$ | (ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 2^{2n}}$ |
| (ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{n^3 4^n}$ | (ج) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2n+3}$ |
| (د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$ | (د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{3x+2}{-5}\right)^n$ |

مسئله ۴. تمرینات ۱ تا ۸ مسائل بخش پنجم فصل ۹ کتاب آدامز: مرکز، شعاع، و بازه همگرایی سری‌های توانی زیر را مشخص کنید.

| | |
|---|--|
| (ا) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 (2x-3)^n$ | (آ) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n+1}}$ |
| (ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} (4-x)^n$ | (ب) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (x+1)^n$ |
| (ج) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+5^n)}{n!} x^n$ | (ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+2}{2}\right)^n$ |
| (د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n}$ | (د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}} x^n$ |

مسئله ۵. تمرینات ۱۲ تا ۲۰ مسائل بخش پنجم فصل ۹ کتاب آدامز: با شروع از سری توانی زیر

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1,$$

و اعمال مناسب روی آن، سری‌های توانی خواسته شده در زیر، و شعاع همگرایی آنها را بیابید.

- (آ) به صورت بسط با توان‌های x $\frac{1}{2-x}$
- (ب) به صورت بسط با توان‌های x $\frac{1}{(2-x)^2}$
- (ج) به صورت بسط با توان‌های x $\frac{1}{1+2x}$
- (د) به صورت بسط با توان‌های x $\ln(2-x)$
- (ه) به صورت بسط با توان‌های $x-1$ $\frac{1}{x}$
- (و) به صورت بسط با توان‌های $x+2$ $\frac{1}{x^2}$
- (ز) به صورت بسط با توان‌های x $\frac{1-x}{1+x}$
- (ح) به صورت بسط با توان‌های x $\frac{x^3}{1-2x^2}$
- (ط) به صورت بسط با توان‌های $x-4$ $\ln x$

مسئله ۶. تمرینات ۲۱ تا ۲۶ مسائل بخش پنجم فصل ۹ کتاب آدامز: بازه همگرایی و مقدار همگرایی سری‌های توانی زیر را

مشخص کنید.

$$1 - 4x + 16x^2 - 64x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x)^n \quad (\text{آ})$$

$$3 + 4x + 5x^2 + 6x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{6} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} \quad (\text{ج})$$

$$1 \times 3 - 2 \times 4x + 3 \times 5x^2 - 4 \times 6x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+3)x^n \quad (\text{د})$$

$$2 + 4x^2 + 6x^4 + 8x^6 + 10x^8 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)x^{2n} \quad (\text{ه})$$

مسئله ۷. تمرینات ۲۷ تا ۳۲ مسائل بخش پنجم فصل ۹ کتاب آدامز: مقدار همگرایی سری‌های عددی زیر را مشخص کنید.

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{2^n} \quad (\text{د}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \quad (\text{آ}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^n} \quad (\text{ه}) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} \quad (\text{ب}) \\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} \quad (\text{و}) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{\pi^n} \quad (\text{ج}) \end{array}$$

مسئله ۸. تمرینات ۱ تا ۱۴ مسائل بخش ششم فصل ۹ کتاب آدامز: بسط مک‌لورن هر یک از توابع زیر را بیابید و مشخص کنید به ازای چه مقادیری از x معتبر (همگرا) هستند.

$$\begin{array}{ll} e^{3x+1} \quad (\text{آ}) & \tan^{-1}(5x^2) \quad (\text{ح}) \\ \cos(2x^3) \quad (\text{ب}) & \frac{1+x^3}{1+x^2} \quad (\text{ط}) \\ \sin(x - \pi/4) \quad (\text{ج}) & \ln(2+x^2) \quad (\text{ی}) \\ \cos(2x - \pi) \quad (\text{د}) & \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (\text{ک}) \\ x^2 \sin(x/3) \quad (\text{ه}) & (e^{2x^2} - 1)/x^2 \quad (\text{ل}) \\ \cos^2(x/2) \quad (\text{و}) & \cosh x - \cos x \quad (\text{م}) \\ \sin x \cos x \quad (\text{ز}) & \sinh x - \sin x \quad (\text{ن}) \end{array}$$

مسئله ۹. تمرینات ۱۵ تا ۲۶ مسائل بخش ششم فصل ۹ کتاب آدامز: بسط‌های تیلور خواسته شده زیر را بیابید و مشخص کنید به ازای چه مقادیری از x معتبر (همگرا) هستند.

$$\begin{array}{l} (\text{آ}) \quad f(x) = e^{-2x} \text{ حول } -1. \\ (\text{ب}) \quad f(x) = \sin x \text{ حول } \pi/2. \\ (\text{ج}) \quad f(x) = \cos x \text{ به صورت توان‌های } x - \pi. \\ (\text{د}) \quad f(x) = \ln x \text{ به صورت توان‌های } x - 3. \\ (\text{ه}) \quad f(x) = \ln(2+x) \text{ به صورت توان‌های } x - 2. \\ (\text{و}) \quad f(x) = e^{2x+3} \text{ به صورت توان‌های } x + 1. \\ (\text{ز}) \quad f(x) = \sin x - \cos x \text{ حول } \frac{\pi}{4}. \end{array}$$

ح) $f(x) = \cos^2 x$ حول $\frac{\pi}{8}$.

ط) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ به صورت توان های $x + 2$.

ی) $f(x) = \frac{x}{1+x}$ به صورت توان های $x - 1$.

ک) $f(x) = x \ln x$ به صورت توان های $x - 1$.

ل) $f(x) = xe^x$ به صورت توان های $x + 2$.

مسئله ۱۰. تمرینات ۲۷ تا ۳۰ مسائل بخش ششم فصل ۹ کتاب آدامز: در هر کدام از موارد زیر، سه جمله اول غیر صفر را در بسط مک لورن، برای توابع داده شده، بیابید.

آ) $\sec x$ ج) $\tan^{-1}(e^x - 1)$

ب) $\sec x \tan x$ د) $e^{\tan^{-1} x} - 1$

مسئله ۱۱. تمرینات ۳۳ تا ۳۶ مسائل بخش ششم فصل ۹ کتاب آدامز: مجموع سری های زیر را بیابید.

آ) $1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots$

ب) $x^3 - \frac{x^9}{3! \times 4} + \frac{x^{15}}{5! \times 16} - \frac{x^{21}}{7! \times 64} + \frac{x^{27}}{9! \times 256} - \dots$

ج) $1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} + \dots$

د) $1 + \frac{1}{2 \times 2!} + \frac{1}{4 \times 3!} + \frac{1}{8 \times 4!} + \dots$

مسئله ۱۲. تمرین ۳۷ مسائل بخش ششم فصل ۹ کتاب آدامز: فرض کنید $p(x) = 1 + x + x^2$ باشد. مطلوب است محاسبه بسط مک لورن $p(x)$ و همچنین بسط تیلور آن حول $x = 1$.

مسئله ۱۳. تمرینات ۴۱ مسائل بخش ششم فصل ۹ کتاب آدامز: با ضرب بسط های مک لورن توابع e^x و e^y ، نشان دهید $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

مسئله ۱۴. تمرینات ۳ تا ۱۴ مسائل بخش هفتم فصل ۹ کتاب آدامز: به کمک بسط مک لورن یا بسط تیلور، مقادیر داده شده زیر را طوری تقریب بزنید که قدر مطلق خطای تقریب آنها کمتر از $10^{-5} \times 5$ باشد.

آ) $e^{0.2}$ د) $\sin(0.1)$ ز) $\ln(0.9)$ ی) $\tan^{-1} 0.2$

ب) $1/e$ ه) $\cos 5^\circ$ ح) $\sin 8^\circ$ ک) $\cosh(1)$

ج) $e^{1/2}$ و) $\ln(6/5)$ ط) $\cos 65^\circ$ ل) $\ln(3/2)$

مسئله ۱۵. تمرینات ۱۵ تا ۱۹ مسائل بخش هفتم فصل ۹ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه بسط مک‌لورن توابع داده شده زیر.

$$L(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt \quad (\text{د})$$

$$M(x) = \int_0^x \frac{\tan^{-1} t^2}{t^2} dt \quad (\text{ه})$$

$$I(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (\text{آ})$$

$$J(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt \quad (\text{ب})$$

$$K(x) = \int_1^{1+x} \frac{\ln t}{t-1} dt \quad (\text{ج})$$

مسئله ۱۶. تمرینات ۲۲ تا ۲۷ مسائل بخش هفتم فصل ۹ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه حدود زیر به کمک بسط مک‌لورن.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x - 3 \sin 2x}{5x - \tan^{-1}(5x)} \quad (\text{د})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x}{x(\cos(\sin x) - 1)} \quad (\text{ه})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{\cosh x - \cos x} \quad (\text{و})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{\sinh x} \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{(1 - \cos x)^2} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x^2 - \ln(1 + x^2)} \quad (\text{ج})$$

مسئله ۱۷. تمرینات شماره ۲۱ و ۲۲ مسائل مروری بخش مروری فصل ۹ کتاب آدامز: مشخص کنید که سری‌های زیر به ازای چه

مقادیری از x ، همگرایی مطلق، همگرایی مشروط، و یا واگرا هستند.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 - 2x)^n}{n} \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 2)^n}{3^n \sqrt{n}} \quad (\text{آ})$$

مسئله ۱۸. تمرین شماره ۳۹ مسائل مروری بخش مروری فصل ۹ کتاب آدامز: چه تابعی دارای بسط مک‌لورن به صورت زیر می‌باشد.

$$1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$$

(راهنمایی: قرار دهید $x = u^2$ ، و از بسط مک‌لورن تابع $\cos u$ استفاده کنید).

مسئله ۱۹. تمرین شماره ۴۰ مسائل مروری بخش مروری فصل ۹ کتاب آدامز: فرض کنید تابع $f(x)$ دارای بسط مک‌لورن زیر باشد.

$$1 + x^2 + \frac{x^4}{2^2} + \frac{x^6}{3^2} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$$

مطلوبست محاسبه $f^{(k)}(0)$ ، برای هر عدد صحیح مثبت k .

مسئله ۲۰. تمرینات شماره ۴۵ و ۴۶ مسائل مروری بخش مروری فصل ۹ کتاب آدامز: مطلوبست محاسبه حدود زیر به کمک بسط مک‌لورن.

$$(آ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3 \int_0^x \sin(t^2) dt}{x^7}$$

$$(ب) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \tan^{-1} x)(e^{2x} - 1)}{2x^2 - 1 + \cos(2x)}$$

مسئله ۲۱. (آ) نشان دهید شعاع همگرایی سری مک‌لورن $y = \frac{1}{1+x}$ برابر $R = 1$ می‌باشد؛ یعنی به ازای x هایی که $|x| < 1$ ، سری مک‌لورن آن که به صورت زیر است

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots,$$

به خود تابع $\frac{1}{1+x}$ همگرا می‌باشد. در نقاط مرزی ناحیه همگرایی، یعنی $x = \pm 1$ ، چه چیزی در مورد همگرایی یا واگرایی سری مک‌لورن و ارتباط آن با مقدار تابع می‌توان گفت؟

(ب) با انتگرال‌گیری جمله به جمله از سری فوق، تحقیق کنید که سری مک‌لورن $\ln(1+x)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

نشان دهید شعاع همگرایی این سری مک‌لورن برابر $R = 1$ می‌باشد. در نقاط مرزی ناحیه همگرایی، یعنی $x = \pm 1$ ، چه چیزی در مورد همگرایی یا واگرایی سری مک‌لورن و ارتباط آن با مقدار تابع می‌توان گفت؟

(ج) با قرار دادن $x = t^2$ در سری مک‌لورن تابع $\frac{1}{1+x}$ و انتگرال‌گیری جمله به جمله از آن، تحقیق کنید که سری مک‌لورن $\tan^{-1} t$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\tan^{-1} t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots$$

نشان دهید شعاع همگرایی این سری مک‌لورن برابر $R = 1$ می‌باشد. در نقاط مرزی ناحیه همگرایی، یعنی $x = \pm 1$ ، چه چیزی در مورد همگرایی یا واگرایی سری مک‌لورن و ارتباط آن با مقدار تابع می‌توان گفت؟

(د) با دوبار مشتق‌گیری جمله به جمله از سری مک‌لورن تابع $\frac{1}{1+x}$ ، تحقیق کنید که سری مک‌لورن $\frac{1}{(1+x)^3}$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{1}{(1+x)^3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 + \dots$$

مسئله ۲۲. مطلوبست محاسبه سری تیلور تابع $f(x) = \frac{x}{5-2x}$ حول نقطه $x = \frac{1}{2}$ ، به دو طریق زیر.

آ) استفاده از فرمول اصلی سری تیلور، یعنی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1/2)}{n!} (x - 1/2)^n$

ب) استفاده از رابطه

$$\frac{x}{5-2x} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1/2}{2}}$$

و نهایتاً بهره‌گیری از سری مک‌لورن (سری هندسی)

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \dots, \quad -1 < u < 1.$$

مسئله ۲۳. مشابه تمرین ۴۰ مسائل بخش ششم فصل ۹ کتاب آدامز: تابعی مثال بزنید که در همسایگی یک نقطه مفروض بینهایت بار

مشتمق پذیر باشد، اما سری تیلور آن حول نقطه مذکور، به خود تابع همگرا نباشد.
