

با یاد او

سری اول تمرینات ریاضی مهندسی

مسئله ۱. با استفاده از سری فوریه $f(x) = x^2$ روی $|x| < \pi$ و $f(x + 2\pi) = f(x)$ مقادیر $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ را محاسبه کنید.

مسئله ۲. با استفاده از سری فوریه تابع $f(x) = |\cos x|$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ را محاسبه کنید.

مسئله ۳. با استفاده از سری فوریه تابع $f(x) = |x|^3, |x| \leq 2$ و $f(x + 4) = f(x)$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ را محاسبه کنید.

مسئله ۴. با استفاده از سری فوریه تابع $f(x) = x(1-|x|), |x| \leq 1$ و $f(x + 2) = f(x)$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ را محاسبه کنید.

مسئله ۵. با استفاده از سری فوریه $f(x) = x^2, |x| \leq \pi$ مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ را محاسبه کنید.

مسئله ۶. با استفاده از سری فوریه $f(x) = \frac{\pi^2}{6}x - \frac{\pi}{6}x^2 + \frac{1}{12}x^3, |x| \leq \pi$ مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ را بیابید.

مسئله ۷. با استفاده از سری فوریه $f(x) = x^4 - x^2, |x| \leq \pi$ مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$ را محاسبه کنید.

مسئله ۸. ابتدا نشان دهید:

$$\ln\left(2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx, \quad x \neq 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

$$\ln\left(2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos nx, \quad x \neq (2m+1)\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

سپس، با استفاده از آنها نشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 \ln\left(2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right) dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 \ln\left(2\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right) dx$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} x^2 \ln\left(\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right) dx.$$