



**سوال ۱** تابع  $f$  را روی  $\mathbb{C}$  بدین صورت تعریف کنید:  $f(0) = 0$  و اگر  $z \neq 0$  آنگاه  $f(z) = \frac{z^5}{|z|^4}$ . نشان دهید تابع  $f$  در  $z = 0$  به معنای مختلط مشتق پذیر نیست ولی روابط کشی-ریمان در مبدا مختصات برای تابع  $f$  برقرارند.

**سوال ۲** تابع  $f$  را روی  $\mathbb{C}$  بدین صورت تعریف کنید:  $f(0) = 0$  و اگر  $z \neq 0$  آنگاه  $f(z) = \frac{|z|^4}{z^3}$ . نشان دهید تابع  $f$  در  $z = 0$  به معنای مختلط مشتق پذیر نیست ولی روابط کشی-ریمان در مبدا مختصات برای تابع  $f$  برقرارند.

**سوال ۳** فرض کنید تابع  $f$  روی  $\mathbb{C}$  تحلیلی باشد. نشان دهید تابع  $g$  که با ضابطه  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  تعریف می‌شود نیز روی  $\mathbb{C}$  تحلیلی است.

**سوال ۴** فرض کنید  $f$  تابعی تحلیلی روی  $\mathbb{C}$  باشد (اصطلاحاً به  $f$  تابعی تام می‌گویند). نشان دهید اگر تابع  $\bar{f}$  نیز روی  $\mathbb{C}$  تحلیلی باشد آنگاه  $f$  لزوماً تابعی ثابت است.

**سوال ۵** فرض کنید  $f$  تابعی تحلیلی روی  $\mathbb{C}$  باشد.

(آ) نشان دهید اگر  $f$  حقیقی مقدار باشد آنگاه  $f$  لزوماً تابعی ثابت است.

(ب) نشان دهید اگر روی  $\mathbb{C}$  داشته باشیم  $|f| = c$  که در آن  $c$  یک ثابت است آنگاه لزوماً  $f$  تابعی ثابت است.

**سوال ۶** نقاطی از صفحه مختلط را بیابید که توابع مذکور در آن نقاط مشتق پذیر باشند (به معنای مختلط).

$$f(z) = e^y e^{ix} \quad (\text{آ})$$

$$f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2) \quad (\text{ب})$$

$$f(z) = xy + iy \quad (\text{ج})$$

$$f(z) = e^{2x} \cos(3x) + ie^{3x} \sin(2y) \quad (\text{د})$$

**سوال ۷** مزدوج همساز هریک از توابع زیر را بدست آورید.

$$u(x, y) = y^2 - 3x^2y \quad (\text{آ})$$

$$u(x, y) = -2 - x^3 + 3xy^2 + \sinh x \sin y \quad (\text{ب})$$

سوال ۸ نشان دهید تابع  $f(z) = \sqrt[n]{re^{i\frac{\theta}{n}}}$  روی ناحیه:

$$S = \{(r, \theta) : r > 0, 0 < \theta < \pi\}$$

تحلیلی است.