**معادلات دیفرانسیل** **(پاییز ۹۹)**

# سری نهم تمرینات

مدرس: دکتر بحرینی، دکتر جعفری — دستیاران آموزشی: مسعود بیرامی، علی آل‌درویش

## تمرین۱

معادلات زیر را به دستگاه معادلات مرتبه اول تبدیل کنید

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + tx^2 = 0 \qquad y'' - x^2y' + (1 - x^2)y = \sin(x)$$

## تمرین۲

مساله مقدار اولیه زیر را بصورت مساله مقدار اولیه دستگاه معادلات مرتبه اول خطی بنویسید. (هم بصورت سه معادله مجزا و هم به فرم ماتریسی)

$$y^{(3)} + p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = 0 \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad y''(0) = y''_0$$

## تمرین۳

دستگاه معادلات دیفرانسیل $x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} x$ را بصورت دو دستگاه مرتبه اول بنویسید.

آ) با حذف $y$ به یک معادله مرتبه دوم برای $x$ برسید

ب) معادله مرتبه دوم قسمت قبل را بصورت دستگاه مرتبه اول بنویسید. این همان سیستم ابتدای سوال نیست اما نشان دهید می‌توان با یک تغییر مختصات به دستگاه اول تبدیل کرد.

## تمرین۴

برای سیستم $y' = 2x + y \quad x' = 4x - y$

آ) با استفاده از ماتریس نشان دهید که $x = e^{3t}, y = e^{3t}$ و $x = e^{2t}, y = 2e^{2t}$ جواب‌های این معادله هستند.

ب) بررسی کنید که این جواب‌ها تشکیل یک مجموعه اساسی می‌دهند. (مستقل خطی هستند.)

ج) جواب عمومی این دستگاه را با استفاده از ثابت‌های $c_1$ و $c_2$ به دو صورت برداری و .... $= y$ ..... $= x$ بنویسید.

## تمرین ۵

برای دستگاه $x' = Ax$ وقتی که $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

آ) نشان دهید که $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$ و $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}$ تشکیل یک جواب اساسی برای این دستگاه را میدهد. (نشان دهید جواب هستند و مستقل خطی اند.)

ب) مساله مقدار اولیه $x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x' = Ax$ را حل کنید.

## تمرین ۶

مساله مقدار اولیه $x' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$ را با دو روش حل کنید:

آ) معادله دوم بر حسب $y$ را حل کنید و در معادله اول قرار دهید.

ب) با حل معادله اول برای $y$ و جایگذاری آن در معادله دوم یک معادله درجه دوم برای $x$ به دست می‌آورید، آنرا حل کنید و سپس $y$ را از معادله اول به دست آورید. آیا دو جواب یکی هستند ؟

## تمرین ۷

فرض کنید ماده رادیواکتیوی $R$ ابتدا به ماده $S$ تبدیل می‌شود و سپس ماده $S$ تجزیه می‌شود. اگر $x$ و $y$ نشان دهنده مقادیر $R$ و $S$ در زمان $t$ باشند.

آ) نشان دهید سیستم فیزیکی بصورت دستگاه معادلات زیر مدل می‌شود.

$$x' = Ax \quad A = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

که در آن $a$ و $b$ ثابت هستند.

ب) این دستگاه را با استفاده از روش حذفی حل کنید.

ج) مقدار هر ماده را در لحظه $t$ با شرط اینکه در ابتدا فقط ماده $R$ با مقدار $x_0$ موجود باشد را بیابید.

## تمرین ۸

سیستم $x' = Ax$ را برای مقادیر مختلف ماتریس $A$ حل کنید.

آ) $\begin{bmatrix} -۳ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۸ & -۶ \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ -۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$

(مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناسب آنها را به دست آورید و سپس با استفاده از آنها جواب عمومی را بنویسید)

## تمرین ۹

دو کشاورز به اسم اسمیت و جونز در چراگاه‌های خود دارای کولونی خرگوش هستند و هر ساله به نسبت $a$ از خرگوش‌های اسمیت به علت علف سبزتر به کولونی جونز می‌روند همچنین به همین دلیل به نسبت $b$ از خرگوش‌های جونز به کولونی اسمیت می‌آیند. فرض کنید نرخ رشد خرگوش‌ها یک عدد در سال (غیرواقعی ولی راحت‌کننده مساله) باشد. (هر گوش در هرسال)

آ) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل برای $S$ و $J$ جمعیت خرگوش‌های هر کولونی بنویسید. (زمان بر حسب سال)

ب) اگر $a = b = ۲$ و در ابتدا اسمیت بیست عدد و جونز ده عدد خرگوش داشته باشند. جمعیت هر کولونی نسبت به زمان چطور تغییر می‌کند؟

ج) نشان دهید فارغ از مقادیر $a$ و $b$ و شرایط اولیه، مقادیر $S$ و $J$ هرگز نوسان نمی‌کنند.