

## سری ششم تمرینات

مدرس: دکتر بحرینی، دکتر جعفری

دستیاران آموزشی: مسعود بیرامی، علی آل درویش

## تمرین ۱

به فرض  $f(t) = e^{-t} \cos(3t)$  باشد با استفاده از قوانین و جدول‌های تبدیل لاپلاس،  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  را محاسبه کنید. سپس مشتق آن و تبدیل لاپلاس معادلش را حساب کنید و قاعده  $t$ - $derivative$  را برای این تابع راستی آزمایی کنید.

## تمرین ۲

تبدیل لاپلاس معکوس هر یک از عبارتهای زیر را محاسبه کنید.

$$(آ) \frac{2s+1}{s^2+9}$$

$$(ب) \frac{s^2+2}{s^3-s}$$

$$(ج) \frac{2}{s^2(s-1)}$$

## تمرین ۳

معادله دیفرانسیل  $\dot{x} + 2x = t^2$  با شرط اولیه  $x(0_+) = 1$  را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

## تمرین ۴

به فرض  $z$  یک عدد مختلط باشد. با استفاده از تعریف  $\mathcal{L}[e^{zt}]$  را بیابید و ناحیه همگرایی انتگرال آن را مشخص کنید.

## تمرین ۵

به فرض  $F(s)$  تبدیل لاپلاس تابع  $f(t)$  و  $a < 0$  باشد. با استفاده از تعریف انتگرال و تغییر متغیر، تبدیل

سری ششم تمرینات

لاپلاس  $g(t) = f(at)$  را بر حسب  $F(s)$  محاسبه کنید. درستی فرمول به دست آورده شده را، با محاسبه تبدیل لاپلاس  $f(t)$  و  $f(at)$  که در آن  $f(t) = t^n$  می باشد، راستی آزمایی کنید.

تمرین ۶

ثابت کنید به ازای هر  $(s > a)$  عبارت  $\mathcal{L}(e^{at})$  روی بازه‌ای به فرم  $(a, s)$  وجود ندارد. (کافی است نشان دهید انتگرال معین برای هر چنین  $s$  ای همگرا نمی باشد).

تمرین ۷

به ازای چه مقادیری از  $k$  عبارت  $\mathcal{L}(\frac{1}{t^k})$  وجود دارد؟ (فرمول تبدیل لاپلاس را بنویسید و تحقیق کنید به ازای چه مقادیری از  $k$  همگراست).

تمرین ۸

اگر  $y(t)$  یک جواب مساله مقدار اولیه

$$y'' + ty = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

باشد، آنگاه  $\mathcal{L}(y(t))$  جواب کدام معادله دیفرانسیل معمولی است؟ (جواب  $y(t)$  را یک تابع ایری و معادله دیفرانسیل مرتبط با آن را معادله ایری<sup>۱</sup> می گویند).

تمرین ۹

جواب مساله مقدار اولیه زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس بیابید

$$y'' - 2y' + y = e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

تمرین ۱۰

برای هر یک از عبارات زیر، مقدار  $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$  را محاسبه کنید:

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} \quad (آ)$$

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} \quad (ب)$$

<sup>1</sup>Airy function