



به نام خدا

سری نهم حل تمرین

درس ریاضی عمومی ۱ گروه ۱-۴

پاییز ۹۹

**سوال ۱** فرض کنید دنباله  $a_n$  دنباله ای با ضابطه  $a_{n+1} = \sqrt{15 + 2a_n}$  داده شده است که در آن  $a_1 = 3$ . نشان دهید این دنباله همگراست و مقدار همگرایی آن را محاسبه کنید.

**سوال ۲** فرض کنید  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  باشد. ثابت کنید این دنباله صعودی است و  $e$  یک کران بالا برای آن است. در پایان ثابت کنید این دنباله به  $e$  همگراست.

**سوال ۳** عدد حقیقی  $p$  را چنان تعیین کنید که سری  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$  همگرا باشد.

**سوال ۴** همگرایی و واگرایی سری های زیر را مشخص نمایید.

الف)  $\sum \frac{n!}{n^2 e^n}$       ب)  $\sum \frac{n^n}{\pi^n n!}$

ج)  $\sum (\frac{n}{n+1})^{n^2}$       د)  $\sum \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!}$

ه)  $\sum (1 + \frac{1}{n})^2 e^{-n}$       و)  $\sum \frac{\arctan n}{\sqrt{n^3}}$

**سوال ۵** فرض کنید  $a_n, b_n$  دو دنباله با جملات مثبت بوده و داشته باشیم  $\sum b_n$  واگرا و  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ . ثابت کنید  $\sum a_n$  نیز

واگراست. از این قضیه استفاده کنید و نشان دهید  $\sum \frac{1}{\ln n}$  واگراست. همچنین نشان دهید اگر  $a_n > 0$  و  $\lim na_n \neq 0$  آنگاه  $\sum a_n$  واگراست.

**سوال ۶** اگر سری  $\sum a_n$  همگرا باشد و  $a_n > 0$ ، آیا  $\sum \sin(a_n)$  و  $\sum a_n^2$  همگرا هستند.