



به نام خدا

سری اول حل تمرین

درس ریاضی عمومی ۱

پاییز ۹۹

سوال ۱ فرض کنید تابع f روی بازه $[0, 1]$ پیوسته است و برای هر x در این بازه داریم $0 \leq f(x) \leq 1$. نشان دهید عدد ثابت c در این بازه یافت می شود که $f(c) = c$.

سوال ۲ اگر یک تابع زوج f در $x = 0$ از راست پیوسته باشد، نشان دهید در این نقطه پیوسته است.

سوال ۳ حدهای زیر را ثابت کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ (الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9 \text{ (ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \text{ (ج)}$$

سوال ۴ فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ و $M \neq 0$. ثابت کنید $\delta > 0$ وجود دارد بطوریکه برای هر x که $0 < |x - a| < \delta$ آنگاه داریم: $|f(x)| > \frac{|M|}{2}$.

سوال ۵ فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است و اعداد حقیقی $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ وجود دارند که $f(x_i) = x_{i+1}$ برای

$i = 1, 2, 3$ و $f(x_4) = x_1$. ثابت کنید اعداد حقیقی $c_1 > c_2 > c_3$ وجود دارند که

$$f(c_1) = c_1, f f(c_2) = c_2, f f f(c_3) = c_3$$

سوال ۶ فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است و داریم: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$. نشان دهید $f(x)$ روی \mathbb{R} مینیمم مطلق دارد.