



به نام خدا

سری دوم حل تمرین

درس ریاضی عمومی ۱

پاییز ۹۹

سوال ۱ فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است و اعداد حقیقی $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ وجود دارند که $f(x_i) = x_{i+1}$ برای

$i = 1, 2, 3$ و $f(x_4) = x_1$. ثابت کنید اعداد حقیقی $c_1 > c_2 > c_3$ وجود دارند که

$$f(c_1) = c_1, ff(c_2) = c_2, fff(c_3) = c_3$$

سوال ۲ فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است و برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم: $fff(x) = x$. ثابت کنید تابع f تابع همانی

است یعنی برای هر عدد حقیقی x داریم $f(x) = x$.

سوال ۳ فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است و داریم: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$. نشان دهید $f(x)$ روی \mathbb{R} مینیمم مطلق دارد.

سوال ۴ فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ و $M \neq 0$. ثابت کنید $\delta < \epsilon$ وجود دارد بطوریکه برای هر x که $\epsilon > |x - a| > \delta$ آنگاه

$$\text{داریم: } |f(x)| > \frac{|M|}{2}$$

سوال ۵ فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ و $M \neq 0$. ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{M}$.

سوال ۶ فرض کنید تابع حقیقی مقدار f روی بازه I مشتق پذیر باشد. اگر $a \in I$ و $f'(a) > 0$ ، آنگاه نشان دهید عدد حقیقی

مثبت h وجود دارد بطوریکه برای هر x در بازه $(a, a + h)$ داریم: $f(x) > f(a)$.

همچنین مشابه عدد حقیقی مثبت h' وجود دارد بطوریکه برای هر x در بازه $(a - h', a)$ داریم: $f(x) < f(a)$.

سوال ۷ فرض کنید تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد. نشان دهید $f'(0) = 1$ اما f' در 0 پیوسته نیست.

همچنین نشان دهید در هر بازه شامل 0 ، x هایی یافت می شوند که $f'(x) < 0$ و از آن نتیجه بگیرید که f در هیچ بازه ای

حول 0 نمی تواند صعودی باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

سوال ۸ فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد به طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}$ یا $f(x) = 0$ است و یا $f'(x) = 0$ و یا هر دو. ثابت کنید تابع $f(x)$ تابع ثابت است.

سوال ۹ ثابت کنید اگر تابع $f(x)$ پیوسته باشد، آنگاه $f'(x)$ خاصیت مقدار میانی دارد. همچنین نتیجه بگیرید اگر برای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم $f'(x) \neq 0$ ، آنگاه $f(x)$ در این بازه صعودی اکید یا نزولی اکید است.

سوال ۱۰ ثابت کنید تابع $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ در نقاط گویا ناپیوسته و در نقاط گنگ پیوسته است. همچنین نشان دهید در هیچ نقطه ای مشتق پذیر نیست. فرض کنید $f(0) = f(1) = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p, q > 0, (p, q) = 1 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$