



دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا
ریاضی مهندسی

سری نهم تمرین های کلاس حل تمرین

۱. توابع زیر را با سری فوریه کسینوسی در بازه $(0, 2)$ نمایش دهید.

الف:

$$f(x) = x,$$

ب:

$$f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}.$$

۲. توابع زیر را با سری فوریه سینوسی در بازه $(0, 4)$ نمایش دهید.

الف:

$$f(x) = 4 - x,$$

ب:

$$f(x) = \cosh \frac{\pi x}{4}.$$

۳. صورت مختلط سری فوریه توابع با دوره تناوب 2π را که در بازه $(-\pi, \pi)$ با ضابطه های زیر تعریف شده اند، بیابید.

الف:

$$f(x) = \cosh x,$$

ب:

$$f(x) = |\sin x|.$$

۴. با استفاده از سری های فوریه تابعی مناسب و مشتق گیری از آن ها، هر یک از توابع زیر را با یک سری فوریه در بازه $(0, \pi)$ نمایش دهید.

الف:

$$f(x) = \sin^2 x,$$

ب:

$$f(x) = \cos x + \cos 2x.$$

۵. با استفاده از سری فوریه تابعی مناسب و انتگرال گیری از آن، درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n} = \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right), \quad -\pi < x < \pi.$$

۶. اگر برای $0 < x < 2$ داشته باشیم $\left(\sin \frac{\pi x}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{3\pi x}{4} + \frac{1}{4} \sin \frac{5\pi x}{4} - \dots \right)$ ، در این صورت دو جمله اول بسط فوریه تابع متناوب $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ در فاصله $0 < x < 2$ را به دست آورید.

۷. مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله اشتورم-لیوویل منظم زیر را روی $[1, e]$ بیابید. سپس سری فوریه تعمیم یافته به دست آمده را برای توابع $f(x) = 1$ و $g(x) = x$ به دست آورید.

$$\begin{cases} (x^2 y')' + \lambda y = 0, \\ y(1) = y(e) = 0. \end{cases}$$