



دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا
ریاضی مهندسی

سری هفتم تمرین های کلاس حل تمرین

۱. نشان دهید

$$\int_0^{2\pi} \cos^n \theta d\theta = \frac{2\pi(\Gamma n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

۲. حاصل انتگرال های زیر را حساب کنید.

الف:

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a - b \cos \theta},$$

به طوریکه $a > b > 0$.

ب:

$$\oint_{|z|=1} \tan \pi z dz$$

۳. فرض کنید $n \geq 2$. نشان دهید

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{n})}$$

۴. با استفاده از

$$\int_{|z|=1} z^{-1} e^{az} dz = 2\pi i$$

ثابت کنید

$$\int_0^\pi e^{a \cos t} \cos(a \sin t) dt = \pi.$$

۵. فرض کنید C مرز میدان

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Arg } z < \frac{\pi}{4}, |z| < R\}$$

است. با استفاده از

$$\int_C e^{iz^\gamma} dz = 0$$

و

$$\int_0^\infty e^{-x^\gamma} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma}$$

ثابت کنید

$$\int_0^\infty \cos x^\gamma dx = \int_0^\infty \sin x^\gamma dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma\sqrt{\gamma}}$$

۶. حاصل انتگرال های زیر را حساب کنید.

الف:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)} dx$$

ب:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\text{Log } x}{x^2 + a^2} dx,$$

به طوری که $a > 0$.