



۱. فرض کنید m و n اعدادی صحیح باشند. انتگرال

$$\oint_{|z|=1} z^m \bar{z}^n dz$$

را حساب کنید.

۲. انتگرال های زیر را حساب کنید:

الف:

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz \quad (n \in \mathbb{Z})$$

ب:

$$\oint_{|z|=2} \frac{3z+1}{z^2-z} dz$$

ج:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(e^{i\theta}) d\theta$$

۳.

الف: ثابت کنید

$$\int_{z_0}^{z_1} z dz = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

ب: اگر $1 < R = |z| = C_R$ مسیر انتگرالگیری باشد، ثابت کنید

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{\text{Log } z}{z^2} dz \right| < 2\pi \frac{\pi + \text{Log } R}{R}.$$

۴. فرض کنید C مرز میدان

$$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, \text{Im } z > 0\}$$

است. انتگرال $\oint_C \frac{z}{z^2} dz$ را حساب کنید.

۵. فرض کنید m عددی طبیعی است. مقدار

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{\sqrt[m]{z}}{(z-1)^m} dz$$

را برای شاخه اصلی $\sqrt[m]{z}$ حساب کنید.

۶. ثابت کنید برای هر چندجمله ای نظیر $p(z)$ ، $\epsilon > 0$ ای موجود است که

$$\max_{|z|=1} \left| \frac{1}{z} - p(z) \right| > \epsilon.$$

۷. تابع مختلط $f(z) = y - x - i^2 x^2$ از متغیر مختلط $z = x + iy$ مفروض است. اگر $A = 0 + i0$ و $B = 1 + i$ و $C = 0 + i$ ، آنگاه حاصل انتگرال $\oint_{ABCA} f(z) dz$ را حساب کنید.

۸. فرض کنید C یک خم ژردان و قطعه به قطعه هموار است و تابع غیرثابت f روی C و داخل آن مشتق مرتبه دوم پیوسته دارد. ثابت کنید

$$\int_C \overline{f(z)} f'(z) dz$$

یک عدد موهومی محض است.

۹. فرض کنید تابع $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ تابعی تام و $n \geq 1$ عددی صحیح است به طوریکه برای هر $z \in \mathbb{C}$ داریم

$$|f(z)| \leq (1 + |z|)^n.$$

ثابت کنید f یک چندجمله ای است.

۱۰. ثابت کنید اگر قسمت حقیقی یک تابع تام کراندار باشد، آنگاه آن تابع ثابت است.

۱۱. فرض کنید f تابعی تحلیلی روی قرص واحد $D = D(0, 1)$ است و $f(0) = 0$. همچنین فرض کنید برای تمام $z \in D$ داریم $|f(z)| \leq 1$. آنگاه

$$\text{الف: روی } D, |f(z)| \leq |z|.$$

$$\text{ب: } |f'(0)| \leq 1.$$

ج: اگر حالت تساوی در (الف) برای $z \neq 0$ ای اتفاق بیفتد و یا حالت تساوی در (ب) روی دهد، آنگاه ثابتی نظیر λ با $|\lambda| = 1$ موجود است که برای تمام $z \in D$ داریم $f(z) = \lambda z$.

۱۲.

الف: فرض کنید $f(z) = z^2 - 1$ ، ماکسیمم $|f(z)|$ را بر روی قرص $|z| \leq 1$ به دست آورید.

ب: ناحیه بسته شامل درون و روی اضلاع چهار ضلعی با رئوس جواب های معادله $z^2 + 1 = 0$ را D می نامیم. مقدار ماکسیمم تابع $f(z) = |\sin z|^2$ روی ناحیه D را به دست آورید.