



دانشکده علوم ریاضی  
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا  
ریاضی مهندسی

سری اول تمرین های کلاس حل تمرین

۱. به ازای هر دو عدد مختلط مانند  $z_1$  و  $z_2$  ثابت کنید

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

۲. اگر  $z_1, z_2$  و  $z_3$  سه عدد مختلط باشند بطوریکه  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  و  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ ، ثابت کنید که  $z_1, z_2$  و  $z_3$  رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع هستند.

۳. ثابت کنید اگر  $z$  عددی مختلط باشد و  $z \neq 1$ ، آنگاه

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

سپس ثابت کنید اگر  $k \in \mathbb{Z}, \theta \neq 2k\pi$ ، آنگاه

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

۴. مکان هندسی نقاطی را که در هر یک از نامعادلات زیر صدق می کنند، مشخص کنید.

(الف)

$$\operatorname{Im} \frac{z+1}{z-1} \leq 2$$

(ب)

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z-1}{1+i}\right) > \frac{\pi}{3}.$$

۵. به دو طریق ثابت کنید مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادله

$$|z + 4i| + |z - 4i| = 10$$

صدق می کنند، بیضی است.

۶. ثابت کنید  $2^{100} = (1+i)^{200}$  و  $(1+i\sqrt{3})^{-10} = -2^{-11}(1+i\sqrt{3})$ .

۷. ثابت کنید همه ریشه های معادله  $z^5 - (z+1)^5 = 0$  روی خط  $x = -\frac{1}{5}$  واقع اند.

۸. فرض کنید  $n \geq 2$  و  $\omega$  یکی از ریشه های  $n$ ام عدد یک (غیر از یک) است. ثابت کنید

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

۹. فرض کنید  $n \geq 2$ . ابتدا حاصل ضرب ریشه های غیرصفر معادله  $(1-z)^n - 1 = 0$  را بیابید، و سپس با استفاده از آن ثابت کنید

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$