

با یاد او

تمرین‌های فصل ۱۲

مسئله ۱. الف) میدان برداری $F(x, y) = y\vec{i} + x\vec{j}$ را در نظر بگیرید. خطوط میدان آن را بیابید.

ب) آیا میدان برداری

$$F(x, y, z) = (xy - \sin z)\vec{i} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{z}\right)\vec{j} + \left(\frac{e^y}{z^2} - x \cos z\right)\vec{k}$$

روی دامنه $D = \{(x, y, z) : z \neq 0\}$ پایستار است؟ اگر جواب مثبت است یک تابع پتانسیل برای F روی دامنه ذکر شده بیابید.

ج) نشان دهید که میدان برداری $F(x, y, z) = \frac{2x}{z}\vec{i} + \frac{2y}{z}\vec{j} - \frac{x^2 + y^2}{z^2}\vec{k}$ روی دامنه

$D = \{(x, y, z) : z \neq 0\}$ پایستار است و یک تابع پتانسیل برای آن بیابید. همچنین خطوط میدان F را نیز

بیابید.

مسئله ۲. الف) جرم سیمی را که در امتداد خم $r(t) = 3t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 2t^3\vec{k}$ ، $0 \leq t \leq 1$ قرار دارد و چگالی آن در

نقطه $r(t)$ برابر با $1 + t$ می‌باشد، بیابید.

ب) مطلوبست محاسبه $\int_C \sqrt{1 + 4x^2z^2} ds$ که در آن C خم فصل مشترک رویه‌های $x^2 + z^2 = 1$ و

$y = x^2$ است.

ج) مطلوبست محاسبه $\int_L \frac{ds}{x^2 + y^2}$ که در آن L کل خط راست به معادله $Ax + By = C$ با $C \neq 0$ است.

مسئله ۳. الف) مطلوبست محاسبه انتگرال $\int_C F \cdot d\vec{r}$ که در آن C خم $x^2 + y^2 = 4$ در جهت پادساعتگرد است و

میدان برداری F توسط $F(x, y) = (e^x \sin y + 3y)\vec{i} + (e^x \cos y + 2x - 2y)\vec{j}$ داده شده است.

ب) مطلوبست محاسبه کار انجام شده توسط میدان نیروی $F(x, y, z) =$

$(3xz^2 + 2)\vec{k} + (2y \sin x - 4)\vec{j} + (y^2 \cos x + z^3)\vec{i}$ در حرکت دادن ذره‌ای در امتداد خم

$(1 - 2t, 3t - 1, \sin^{-1} t)$ ، $0 \leq t \leq 1$.

مسئله ۴. الف) بار کل رویه پارامتری $r(u, v) = e^u \cos v\vec{i} + e^u \sin v\vec{j} + u\vec{k}$ ، $0 \leq u \leq 1$ و $0 \leq v \leq \pi$ ، که

چگالی باری بر این رویه توسط رابطه $\delta(u, v) = \sqrt{1 + e^{2u}}$ داده شده است، بیابید.

ب) مساحت آن قسمت از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ را که درون استوانه $2ay = x^2 + y^2$ قرار دارد، بیابید.

ج) مساحت آن قسمت از صفحه $Ax + By + Cz = D$ را که درون استوانه بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ قرار دارد،

بیابید.

مسئله ۵. الف) شار میدان برداری $F(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ را در عبور از بالا از رویه پارامتری $r(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + u \vec{k}$ که $0 \leq u \leq 2$ و $0 \leq v \leq \pi$ ، بیابید.

ب) رویه هموار S به صورت پارامتری

$$r(u, v) = (\cos 2u)(2 + v \cos u)\vec{i} + (\sin 2u)(2 + v \cos u)\vec{j} + v \sin u \vec{k}$$

داده شده است که در آن $0 \leq u \leq 2\pi$ و $-1 \leq v \leq 1$. نشان دهید به ازای هر میدان برداری هموار F بر S داریم:

$$\iint_S F \cdot \vec{N} dS = 0$$

که در آن $N = N(u, v)$ یک میدان برداری قائم یکه بر S است که به طور پیوسته به (u, v) بستگی دارد.

مسئله ۶. با استفاده از قضیه گرین مقدار انتگرال $\int_C (x \sin y^2 - y^2) dx + (x^2 y \cos y^2 + 3x) dy$ را که در آن C مرز پادساعتگرد دوزنقه دارای راس های $(0, -2)$ و $(1, -1)$ و $(1, 1)$ و $(0, 2)$ است، بیابید.

مسئله ۷. الف) فرض کنید $F(x, y, z) = 3xz^2 \vec{i} - x\vec{j} - y\vec{k}$. مطلوبست محاسبه $\iint_S F \cdot \vec{N} dS$ که در آن S آن قسمت از استوانه $1 = y^2 + z^2$ است که $x, y, z \geq 0$ و در میان صفحات $x = 0$ و $x = 1$ قرار دارد.

ب) قاعده مخروطی با راس $(0, 0, b)$ و محوری در امتداد محور z ، قرصی به شعاع a در صفحه xy است. شار میدان برداری

$$F(x, y, z) = (x + y^2)\vec{i} + (3x^2y + y^3 - x^3)\vec{j} + (z + 1)\vec{k}$$

در عبور رو به بالا از این مخروط را بیابید.

مسئله ۸. الف) انتگرال $\int_C F \cdot d\vec{r}$ را حول خم $r(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \sin 2t \vec{k}$ برای $0 \leq t \leq 2\pi$ و میدان برداری

$$F(x, y, z) = (e^x - y^3)\vec{i} + (e^y + x^3)\vec{j} + e^z \vec{k}$$

ب) با استفاده از قضیه استوکس نشان دهید:

$$\int_C y dx + z dy + x dz = \sqrt{3} \pi a^2$$

که در آن C خم فصل مشترک رویه های $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و $x + y + z = 0$ با جهت دهی مناسب است.

ج) مطلوبست محاسبه $\iint_S \text{curl} F \cdot \vec{N} dS$ که در آن S نیم کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و $z \geq 0$ و N بردار قائم یکه رو به بیرون بر S است و $F(x, y, z) = 3y\vec{i} - 2xz\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k}$ می باشند.

د) مطلوبست محاسبه $\int_C F \cdot d\vec{r}$ که در آن $F(x, y, z) = ye^x \vec{i} + (x^2 + e^x) \vec{j} + z^2 e^z \vec{k}$ و C خم:

$$r(t) = (1 + \cos t) \vec{i} + (1 + \sin t) \vec{j} + (1 - \cos t - \sin t) \vec{k}$$

به ازای $0 \leq t \leq 2\pi$ است.

مسئله ۹. الف) فرض کنید S رویه‌ای باشد متشکل از شش وجه مکعب $B = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, 2]$. فرض کنید

جهت بردار نرمال بر S برون‌گرا باشد. میدان برداری $F(x, y, z) = y^2 z \vec{i} + y^3 \vec{j} + xz \vec{k}$ را در نظر بگیرید.

$$\iint_S F \cdot \vec{N} dS$$

مطلوبست محاسبه $\iint_S F \cdot \vec{N} dS$. ب) شار میدان برداری $F(x, y, z) = (xz, x^2 y, y^2 z + 1)$ که از سطح S می‌گذرد محاسبه کنید. S مرز ناحیه

محدود به استوانه‌های $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ و صفحات $z = 1$ و $z = 3$ است.

مسئله ۱۰. مساحت رویه پارامتری $r(u, v) = (u^2, uv, v^2)$ را که $0 \leq u \leq 1$ و $0 \leq v \leq 2$ است، بدست آورید. نیازی

به محاسبه انتگرال نیست.

مسئله ۱۱. فرض کنید C_1 نیم‌دایره داده شده به وسیله $x^2 + y^2 = 1$ و $y \geq 0$ و $z = 0$ و C_2 نیم‌دایره داده شده توسط

$x^2 + z^2 = 1$ و $z \geq 0$ و $y = 0$ باشد و خم C را خم متشکل از C_1 و C_2 در نظر بگیرید. یک جهت دلخواه روی

این خم قرار دهید. فرض کنید میدان برداری F توسط $F(x, y, z) = (y + 2y^2, 2x + 4xy + 6z^2, 3x + e^y)$

داده شده باشد. با استفاده از قضیه استوکس انتگرال مسیر $\int_C F \cdot d\vec{r}$ را محاسبه کنید.

مسئله ۱۲. انتگرال $\int_C F \cdot d\vec{r}$ را حول خم $r(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \sin 2t \vec{k}$ برای $0 \leq t \leq 2\pi$ و میدان برداری

زیر حساب کنید.

$$F(x, y, z) = (e^x - y^3) \vec{i} + (e^y + x^3) \vec{j} + e^z \vec{k}$$

مسئله ۱۳. مطلوبست محاسبه $\iint_P \frac{dS}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ که در آن P صفحه $Ax + By + Cz = D$ است و $D \neq 0$.

مسئله ۱۴. فرض کنید C یک خم بسته، ساده و جهت‌دار باشد که از مبدأ مختصات عبور نمی‌کند. انتگرال

$$\int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید:

الف) اگر مبدأ مختصات درون ناحیه احاطه شده توسط C نباشد، این انتگرال برابر با صفر است.

ب) اگر مبدأ مختصات درون ناحیه احاطه شده توسط C باشد، این انتگرال برابر با 2π است.