

# با یاد او

## تمرین‌های فصل ۱۱

مسئله ۱. درستی تساوی زیر را تحقیق کنید.

$$\int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^x \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy dx + \int_2^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy dx = \frac{16}{\pi^3}.$$

مسئله ۲. الف) حاصل انتگرال مکرر زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-2}^0 \left\{ \int_0^{x+2} \frac{e^{x^2+y^2}}{e^{2xy}} dy \right\} dx.$$

(راهنمایی: قرار دهید  $x - y = u$  و  $x = v$ .)

ب) انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^2 \left\{ \int_0^2 \left\{ \int_{\frac{y}{x}}^1 z e^{\frac{y}{x}} dx \right\} dz \right\} dy.$$

مسئله ۳. انتگرال زیر را روی ناحیه مشخص شده محاسبه کنید.

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}} dA$$
$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

مسئله ۴. مطلوبست محاسبه انتگرال  $\iint_R (x^2 + y^2) dA$  که در آن  $R$  ناحیه محصور بین  $xy = 1$  و  $xy = 4$  و

$$x^2 - y^2 = 1 \text{ و } x^2 - y^2 = 9 \text{ است.}$$

مسئله ۵. مقدار انتگرال زیر را بیابید.

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_y^1 \frac{\sin(\pi z)}{z(2-z)} dz dy dx.$$

مسئله ۶. مطلوبست محاسبه:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dy dx.$$

مسئله ۷. حجم ناحیه‌ای را که درون کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$  و استوانه  $x^2 + y^2 = a^2$  قرار گرفته را بیابید.

مسئله ۸. مطلوبست محاسبه حجم محصور شده توسط مخروط  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  و کره  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

مسئله ۹. فرض کنید  $f(x, y, z) = (x^3 + x - y, y^3 + y + x, z^3 + z)$  می‌دانیم  $f$  یک تبدیل یک‌به‌یک روی  $\mathbb{R}^3$  است. فرض کنید  $I^3$  مکعب یکه در  $\mathbb{R}^3$  باشد. مطلوبست محاسبه حجم تصویر  $I^3$  تحت  $f$ ، یعنی  $f(I^3)$ .

مسئله ۱۰. مطلوبست محاسبه جرم قسمتی از کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  که توسط استوانه  $x^2 + y^2 = 2x$  جدا شده است. تابع چگالی این جسم در نقطه  $(x, y, z)$  برابر است با  $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

مسئله ۱۱. مطلوبست محاسبه حجم محصور به رویه‌های  $x^2 + y^2 = 16$  و  $x^2 + y^2 = 4$  و  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  که  $z \geq 0$ .

مسئله ۱۲. نشان دهید اگر  $J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ ، آنگاه:

$$J^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy.$$

با یک محاسبه در مختصات قطبی نتیجه بگیرید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

مسئله ۱۳. مختصات مرکز جرم قسمتی از کره  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  که در مختصات استوانه‌ای بین صفحات  $\theta = \frac{\pi}{4}$  و  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  است را بدست آورید.

مسئله ۱۴. مرکزوار ناحیه درون حلقه منحنی  $x^2 = y^2 + y^3$  را بدست آورید.

مسئله ۱۵. مرکزوار ناحیه  $x \geq 0$  را زمانی که تابع چگالی در نقطه  $(x, y)$  برابر است با  $\delta(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$  است، بدست آورید.

مسئله ۱۶. ابتدا نشان دهید:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

سپس با دوران ناحیه انتگرال‌گیری  $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  به اندازه  $45^\circ$  درجه نشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$