با یاد او

سری سوم تمرین‌های ریاضی ۲

مسئله ۱. فرض کنید E زیرفضای خطی k-بعدی $\mathbb{R}^n$ باشد، که در آن $k < n$، و $\{b_1, \cdots, b_n\}$ پایهٔ یکامتعامدی برای E است. به‌ازای $u \in \mathbb{R}^n$، نشان دهید $u' = \sum_{i=1}^{k}(u \cdot b_i)b_i$ (تصویر قائم u بر E) یگانه عنصر E است به‌طوری‌که $u - u'$ بر E عمود است، یعنی به‌ازای هر $v \in E$، $(u - u') \cdot v = 0$.

مسئله ۲. در $\mathbb{R}^n$ نشان دهید تصویر قائم $u \in \mathbb{R}^n$ بر راستای v، که در آن $v \neq 0$، نقطهٔ اشتراک ابرصفحهٔ گذرنده از u و عمود بر خط راست $\langle v \rangle$ است.

مسئله ۳. در هر مورد تصویر قائم نقطهٔ داده شده بر زیرفضای داده شده را پیدا کنید.

آ) در $\mathbb{R}^3$، نقطهٔ $(1, 1, -1)$ و صفحهٔ $x + y + z = 0$.

ب) در $\mathbb{R}^4$، نقطهٔ $(2, 0, -1, 1)$ و خط راست $\langle(1, 1, -1, 3, 2)\rangle$.

ج) در $\mathbb{R}^4$، نقطهٔ $(2, 0, -1, 1)$ و صفحهٔ گذرنده از سه نقطهٔ $(1, -1, 2, 2)$، $(2, 0, -1, 3)$، و $(0, 1, 0, 2)$.

د) در $\mathbb{R}^4$، نقطهٔ $(2, 0, -1, 1)$ و ابرصفحهٔ $x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 1 = 0$.

مسئله ۴. نشان دهید فاصلهٔ نقطهٔ $(a_1, \cdots, a_n)$ از ابرصفحهٔ $A_0 + A_1x_1 + \cdots + A_nx_n = 0$ در $\mathbb{R}^n$ برابر است با

$$\frac{|A_0 + A_1a_1 + \cdots + A_na_n|}{\sqrt{A_1^2 + \cdots A_n^2}}.$$

مسئله ۵. به‌ازای هر $u \neq 0$ و $v \neq 0$ در $\mathbb{R}^n$ نشان دهید:

$$\left|\frac{u}{|u|} - |u|v\right| = \left|\frac{v}{|v|} - |v|u\right|.$$

مسئله ۶. دو بردار u, v را در صفحه دو بعدی طوری بیابید که u مضربی از $(1, 3)$ باشد، v بر $(1, 3)$ عمود باشد و $u + v = (1, 2)$.

مسئله ۷. فرض کنید $u,v \in \mathbb{R}^n$. نشان دهید u بر v عمود است اگر و فقط اگر $|u| \leq |u+cv|$ برای هر $c \in \mathbb{R}$.

مسئله ۸. فرض کنید $u,v \in \mathbb{R}^n$ و $|u| = ۳$، $|u-v| = ۶$ و $|u+v| = ۴$ باشد. طول بردار v را بیابید.

مسئله ۹. فرض کنید u,v,w سه بردار دو به دو متعامد در $\mathbb{R}^n$ باشند و $x = au+bv+cw$ برای $a,b,c \in \mathbb{R}$. نشان دهید:

$$|x|^۲ = a^۲|u|^۲ + b^۲|v|^۲ + c^۲|w|^۲$$

$$x \cdot u = a|u|^۲ \quad , \quad x \cdot v = b|v|^۲ \quad , \quad x \cdot w = c|w|^۲.$$

مسئله ۱۰. نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ با ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ در پایه متداول $\mathbb{R}^n$ داده شده است.

نمایش ماتریسی f را در پایهٔ $\mathscr{B} = \{(۱,۱,۱),(۱,۱,-۲),(-۱,۱,۰)\}$ بیابید.

مسئله ۱۱. نگاشت خطی $f : \mathbb{R}^۴ \to \mathbb{R}^۴$ نسبت به پایهٔ متداول ماتریس زیر داده شده است:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}.$$

نشان دهید پایه‌ای یکامتعامد چون $\mathscr{B}$ برای $\mathbb{R}^۴$ وجود دارد که نمایش ماتریسی f نسبت به این پایه به‌صورت زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}.$$

مسئله ۱۲. نگاشت خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$T(x,y,z,t)=(x+y-۲t,-z+۳y,x-t,z)$$

الف) فضای پوچ و فضای تصویر این نگاشت را به‌همراه بعد آن‌ها به‌دست آورید.

ب) مقادیر ویژه و بردار ویژه‌های متناظر را به‌دست آورید.

مسئله ۱۳. فرض کنید f تبدیل خطی‌ای روی $\mathbb{R}^۳$ باشد که توسط ماتریس

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ -۱ & -۴ & -۸ \\ ۲ & ۴ & ۸ \end{bmatrix}$$

مشخص گردد (یعنی $f(X)=AX$). اگر E صفحه به معادله $۲x+۳y+۵z=۰$ در $\mathbb{R}^۳$ باشد، بعد $f(E)$ را مشخص کنید.

مسئله ۱۴. مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس‌های زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & ۲ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

مسئله ۱۵. فرض کنید A یک ماتریس وارون‌پذیر $n\times n$ با درایه‌های حقیقی باشد و A^t ترانهاده A باشد. نشان دهید اگر $\lambda\in\mathbb{R}$ یک مقدار ویژه A^tA باشد، آن‌گاه $\lambda>۰$.

مسئله ۱۶. نشان دهید بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه متمایز یک ماتریس متقارن بر هم عمودند.

مسئله ۱۷. نشان دهید شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیر بودن نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ این است که صفر، ویژه مقداری برای آن نباشد.

مسئله ۱۸. نشان دهید اگر نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ دارای n ویژه مقدار حقیقی متمایز باشد آن‌گاه f دارای دقیقاً n ویژه راستای متمایز است.

مسئله ۱۹. اگر u یک بردار ویژه ماتریس وارون‌پذیر A باشد، نشان دهید u بردار ویژه برای A^n، $n\in\mathbb{Z}$، نیز می‌باشد. در مورد مقادیر ویژه متناظر چه می‌شود گفت؟

مسئله ۲۰. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی و نامنفی باشد که مجموع درایه‌های هر ستون آن ۱ است. نشان دهید ۱ مقدار ویژه A است.

مسئله ۲۱. فرض کنید A یک ماتریس ۲×۲ با درایه‌های حقیقی باشد که دارای مقدار ویژه‌های $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$ با بردارهای ویژه $e_1 = (1, 2)$ و $e_2 = (2, 1)$ باشد. دترمینان ماتریس $A^4 + 3A$ را حساب کنید.

مسئله ۲۲. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ نگاشت خطی است. نشان دهید عدد طبیعی چون k وجود دارد که $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ بار}}$ تابع ثابت صفر است اگر و فقط اگر همهٔ ریشه‌های معادلهٔ مشخصه صفر باشد.

مسئله ۲۳. فرض کنید برای یک عدد طبیعی n، $A^n = 0$ باشد. نشان دهید $I + A$ وارون‌پذیر است.

مسئله ۲۴. نشان دهید $A_{n \times n}$ وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر ستون‌های آن در $\mathbb{R}^n$ یک مجموعه مستقل خطی تشکیل دهند.

مسئله ۲۵. ماتریس A را پادمتقارن می‌نامیم اگر $A^T = -A$. اگر $A_{n \times n}$ پادمتقارن و n فرد باشد، نشان دهید $\det A = 0$.

مسئله ۲۶. فرض کنید $m < n$، و A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times m$ باشد به نحوی که $\det(AB) \neq 0$. نشان دهید ماتریس A دارای m ستون مستقل خطی (به عنوان اعضای $\mathbb{R}^m$) است.

مسئله ۲۷. فرض کنید $m < n$، A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times m$ باشد. نشان دهید $\det(BA) = 0$.

مسئله ۲۸. مقدار t را طوری بیابید تا $\{(t, 1, t-1, 0), (t, 0, 1, 0), (0, 0, 1, -1), (1, 1, 1, t)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^4$ بسازد.

مسئله ۲۹. زیر فضای خطی تولید شده توسط بردارهای زیر در $\mathbb{R}^5$ چند بعدی است؟ یک پایه برای آن

معرفی کنید.

$$\Big\{(۱,۱,۰,-۱,۳),(۱,۱,۱,۱,۱),(۱,۰,۰,۲,-۳),(۱,۱,۰,۱,۰),(۱,۱,۰,۱,۰)\Big\}.$$

مسئله ۳۰. پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۴$ بیابید به‌طوری‌که شامل $(۱,۰,۱,۰)$ و $(۰,۱,۰,۱)$ باشد.

مسئله ۳۱. فرض کنید $E_۱$ و $E_۲$ زیر فضاهای خطی از $\mathbb{R}^n$ باشند. نشان دهید:

$$\dim(E_۱+E_۲)=\dim(E_۱)+\dim(E_۲)-\dim(E_۱\cap E_۲).$$

مسئله ۳۲. اگر $E_۱$ و $E_۲$ زیر فضاهای برداری و هر دو از بعد ۵ در $\mathbb{R}^۹$ باشند، نشان دهید $E_۱\cap E_۲\neq ۰$.

مسئله ۳۳. تعریف کنید:

$$E=\Big\{(x_۱,x_۲,x_۳,x_۴)\,:\,x_۱+x_۲=۰,\ x_۳=x_۴\Big\}.$$

نشان دهید E یک زیر فضای خطی $\mathbb{R}^۴$ است. یک پایه برای آن معرفی کنید و آن را به پایه‌ای برای $\mathbb{R}^۴$ گسترش دهید.

مسئله ۳۴. اگر $E_۱$ زیر فضای تولید شده توسط $\Big\{(۲,۰,۳,۱,۱),(۱,۰,۲,۱,۱),(۲,۰,۳,۱,۳)\Big\}$ و $E_۲$ زیر فضای تولید شده توسط $\Big\{(۲,۱,۱,۰,۱),(۳,۲,۳,۲,۳),(۱,۱,۱,۱,۱)\Big\}$ در $\mathbb{R}^۵$ باشند، پایه‌هایی برای زیر فضاهای $E_۱+E_۲$ و $E_۱\cap E_۲$ بیابید.

مسئله ۳۵. نشان دهید در یک دستگاه مختصات دوران یافته مناسب، $xy=۱$ نشان دهندهٔ یک مقطع مخروطی است. نوع مقطع مخروطی را نیز تعیین کنید.