

به نام خدا

سری اول تمرین‌های ریاضی ۲

مسئله ۱. وضعیت نسبی (تقاطع، تنافر، توازی، یا انطباق) زوج‌های زیر از صفحه‌ها را تعیین کنید:

(آ) در \mathbb{R}^4 : صفحات

$$\langle e_1, e_2 + e_3 \rangle \quad , \quad \langle e_2 - e_4, e_1 + e_3 \rangle + (0, 1, -1, 2).$$

(ب) در \mathbb{R}^4 : صفحات

$$\langle e_1 + e_2 - e_3, e_4 \rangle + (-1, 1, 2, 1) \quad , \quad \langle e_1 + e_2, e_3 + e_4 \rangle + (0, 1, 2, -1).$$

(ج) در \mathbb{R}^4 : صفحات

$$\langle 2e_1 - e_2 + e_3 + e_4, e_3 + e_4 \rangle \quad , \quad \langle e_1 + e_3, e_2 + e_3 - e_4 \rangle + (1, 1, -1, 2).$$

(د) در \mathbb{R}^5 : صفحات

$$\langle e_1 + 3e_2 - e_4, e_3 + e_5 \rangle + (0, 1, 0, -1, 2) \quad , \quad \langle -e_1 + e_2, e_3 - 2e_4 + 3e_5 \rangle + (1, 1, 1, -1, 1).$$

مسئله ۲. در هر مورد تعیین کنید خط و صفحه داده شده موازی‌اند یا خیر:

(آ) در \mathbb{R}^4 : خط راست

$$\langle e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4 \rangle + (1, 0, 2, -1)$$

و صفحه

$$\langle 2e_1 + e_2, e_3 - e_4 \rangle.$$

(ب) در \mathbb{R}^5 : خط راست

$$\langle (-1, 0, 1, -1, 0) \rangle$$

و صفحه

$$\langle e_1 + 2e_2 - e_3, e_2 - e_4 + e_5 \rangle + (2, 3, 0, -1, -1).$$

مسئله ۳. نشان دهید هر صفحه‌ای که با صفحه $\langle e_1 - e_2, e_3 + e_4 \rangle$ در \mathbb{R}^4 موازی باشد نسبت به صفحه

$\langle e_1, e_2 \rangle$ متنافر است یا آن را در یک خط راست قطع می‌کند.

مسئله ۴. نشان دهید هر صفحه موازی با $\langle e_1 + 2e_3, e_2 - e_4 \rangle$ در \mathbb{R}^4 صفحه $\langle e_1, e_2 \rangle$ را در یک نقطه قطع می‌کند.

مسئله ۵. خط راست $\langle e_3 \rangle$ و صفحه $\langle e_1, e_2 \rangle$ در \mathbb{R}^4 یکدیگر را در تک نقطه \circ قطع می‌کنند.

(آ) نشان دهید خطوطی موازی $\langle e_3 \rangle$ در \mathbb{R}^4 وجود دارند که اشتراکشان با صفحه $\langle e_1, e_2 \rangle$ تهی است.

(ب) صفحه‌های $\langle e_3, e_4 \rangle$ و $\langle e_1, e_2 \rangle$ در \mathbb{R}^4 یکدیگر را در تک نقطه \circ قطع می‌کنند. آیا صفحه‌ای موازی $\langle e_3, e_4 \rangle$ در \mathbb{R}^4 وجود دارد که اشتراکش با صفحه $\langle e_1, e_2 \rangle$ تهی باشد.

(ج) صفحات $\langle e_3, e_4 \rangle$ و $\langle e_1, e_2 \rangle$ را در \mathbb{R}^5 در نظر بگیرید. آیا صفحه‌ای موازی $\langle e_3, e_4 \rangle$ در \mathbb{R}^5 وجود دارد که اشتراکش با صفحه $\langle e_1, e_2 \rangle$ تهی باشد؟

مسئله ۶. در هر مورد تحقیق کنید که مجموعه داده شده مستقل خطی است یا وابسته خطی:

(آ) مجموعه $\{(1, -1, 2), (-1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ در \mathbb{R}^3 .

(ب) مجموعه $\{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$ در \mathbb{R}^4 .

(ج) مجموعه $\{(0, 3, 1, 1), (2, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 2)\}$ در \mathbb{R}^4 .

(د) مجموعه $\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1\}$ در \mathbb{R}^n (دو حالت زوج و فرد را برای n بررسی کنید).

مسئله ۷. فرض کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ به‌ازای $k \geq 3$ مجموعه‌ای از عناصر \mathbb{R}^n ، به‌ازای $n \geq k$ ، است و ویژگی‌های زیر را دارد:

• $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ و $\{v_2, \dots, v_k\}$ هر یک وابسته خطی است.

• $\{v_2, \dots, v_{k-1}\}$ مستقل خطی است.

نشان دهید هر زیرمجموعه $(k-1)$ تایی از $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ وابسته خطی است.

مسئله ۸. برای هر یک از موارد زیر مثالی در \mathbb{R}^5 بیاورید:

(آ) یک زیرفضای سه بعدی و یک زیرفضای دو بعدی با اشتراکی به‌صورت یک خط راست.

(ب) یک زیرفضای سه بعدی و یک زیرفضای دو بعدی متنافر.

ج) یک خط راست و یک زیر فضای چهار بعدی موازی.

مسئله ۹. فرض کنید $\{P_1, \dots, P_{k+1}\}$ نقاطی در \mathbb{R}^n باشند که در آن $n \geq k + 1$. نشان دهید زیر فضای مستوی k بعدی E از \mathbb{R}^n وجود دارد که شامل $\{P_1, \dots, P_{k+1}\}$ است. اگر هیچ زیر فضای مستوی \mathbb{R}^n با بعد کوچکتر از k وجود نداشته باشد که شامل $\{P_1, \dots, P_{k+1}\}$ باشد. نشان دهید E یکتاست.

مسئله ۱۰. فرض کنید E_1 و E_2 دو زیر فضای مستوی \mathbb{R}^n باشند که $E_1 \cap E_2$ یک تک نقطه ای است. نشان دهید هیچ خط راستی در E_1 با هیچ خط راستی در E_2 موازی نیست.

مسئله ۱۱. فرض کنید E_1 یک زیر فضای مستوی k بعدی \mathbb{R}^n و E_2 یک زیر فضای مستوی l بعدی \mathbb{R}^n باشند که در اینجا $n > k + l$ ، $k > 1$ و $l \geq 1$. نشان دهید خط راست چون l_1 در E_1 و خطی راست مانند l_2 در E_2 وجود دارند که l_1 موازی l_2 است.
