

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

تعداد سوالها: ۸

پاییز ۱۳۹۸

ریاضی عمومی ۱

تمرین‌های سری نهم

(۱) سوال ۱۳ صفحه ۲۱۲ کتاب دکتر شهشهانی) با تعبیر طرف چپ هر یک از تساوی‌های زیر به عنوان حد

یک مجموع ریمان، درستی تساوی‌های زیر را تحقیق کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^k + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^k \right) = \frac{1}{k+1} \text{ (الف)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) = \ln 2 \text{ (پ)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} (\sqrt{n^2 - 1} + \dots + \sqrt{n^2 - n^2}) \right) = \frac{\pi}{4} \text{ (ث)}$$

(۲) سوال ۱۴ صفحه ۲۱۲ کتاب دکتر شهشهانی) فرض کنید تابع مشتق‌پذیر $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ این ویژگی

را دارد که به ازای هر دو عدد مثبت مانند a و b

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

ثابت کنید

$$\text{(الف)} \quad f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b), f(1) = 0 \text{ و به ازای هر عدد گویا مانند } r, f(a^r) = rf(a)$$

$$\text{(ب)} \quad \text{به ازای هر } x, f'(x) = \frac{f'(1)}{x} \text{ (از تساوی } f(ax) = f(a) + f(x) \text{ مشتق بگیرید) و در نتیجه}$$
$$f(x) = f'(1) \ln x$$

(پ) فرض کنید به ازای دست کم یک $x, f(x) \neq 0$. ثابت کنید عددی مثبت مانند E وجود دارد که

$$f(E) = 1 \text{ (توجه کنید که اگر } f(x) \neq 0 \text{، یا } f(x) \text{ مثبت است یا } f\left(\frac{1}{x}\right).$$

(ت) اگر E همان عدد قسمت (پ) باشد، ثابت کنید $f'(1) = \frac{1}{\ln E}$ و نتیجه بگیرید $f(x) = \frac{\ln x}{\ln E}$. تابع

f را لگاریتم به پایه E می‌نامند.

(ث) نمودار تقریبی f را به ازای E ‌های بزرگتر از ۱ و E ‌های کوچکتر از ۱ رسم کنید.

(۳) سوال ۱ صفحه ۲۲۵ کتاب دکتر شهشهانی) در هر مورد ناحیه داده شده را رسم کنید و مساحت آن را

یک بار با انتگرال گیری نسبت به x و بار دیگر با انتگرال گیری نسبت به y حساب کنید.

(ث) ناحیه محصور بین منحنی‌های $y - x^3 = 0$ و $x^2 - x + y - 1 = 0$

(۴) سوال ۲ صفحه ۲۲۵ از کتاب دکتر شهشهانی) در هر مورد ناحیه داده شده را رسم کنید و با انتگرال گیری نسبت به محور مناسب (که ممکن است هیچ یک از محورهای x و y نباشد) مساحت ناحیه مورد نظر را حساب کنید.

$$(پ) \text{ ناحیه محصور به محور } x, \text{ خط } x = 1 \text{ و منحنی } x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$$

(۵) سوال ۱۰ صفحه ۲۲۶ کتاب دکتر شهشهانی) مثلثی را در نظر بگیرید که راس‌هایش در نقاط $(0,0)$ ، $(0,4)$ و $(-2,0)$ قرار دارند. این مثلث را حول خط $y = x$ دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را حساب کنید.

(۶) سوال ۱۶ صفحه ۲۲۵ کتاب دکتر شهشهانی) درباره تابع مشتق پذیر f می‌دانیم که f' انتگرال پذیر است و $f(0) = 0$ ثابت کنید

$$(f \circ f)(x) = \int_0^{f(x)} f'(t) dt.$$

(۷) سوال ۶ صفحه ۲۳۴ کتاب دکتر شهشهانی)

(الف) به ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

(ب) به ازای هر عدد طبیعی مانند m ثابت کنید

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}$$

(۸) سوال ۷ صفحه ۲۳۵ کتاب دکتر شهشهانی) ثابت کنید مساحت ناحیه درون بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ برابر با πab است.