به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

ریاضی عمومی ۱ — تعداد سوال‌ها: ۹

تمرین‌های سری ششم — پاییز ۱۳۹۸

---

۱) **(سوال ۱۱ صفحه ۱۱۳ از کتاب دکتر شهشهانی)** تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید اگر f در a مشتق پذیر باشد، حد زیر موجود و برابر $f'(a)$ است.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

(ب) نشان دهید که اگر این حد وجود داشته باشد، لزومی ندارد که تابع f در نقطه a مشتق پذیر باشد.

(پ) فرض کنید $F(h,k)$ عبارتی بر حسب دو متغیر h و k باشد. منظور از

$$\lim_{h,k\to 0^+} F(h,k) = L$$

این است که به ازای هر عدد مثبت مانند ε، عددهای مثبت δ_1 و δ_2 وجود دارند که هر گاه $0 < h < \delta_1$ و $0 < k < \delta_2$، آن‌گاه $|F(h,k) - L| < \varepsilon$. ثابت کنید اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد، حد زیر وجود دارد و برابر با $f'(a)$ است.

$$\lim_{h,k\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a-k)}{h+k}$$

(راهنمایی: پس از افزودن و کاستن $f(a)$ به صورت این کسر، آن را به شکل مجموع دو کسر بنویسید و از گزاره ۹ در فصل سوم کتاب استفاده کنید.)

(ت) فرض کنید $0 < h < k$. نشان دهید که اگر f در نقطه a مشتق پذیر باشد، لزومی ندارد که حد زیر وجود داشته باشد.

$$\lim_{h,k\to 0^+} \frac{f(a+k)-f(a+h)}{k-h}$$

(راهنمایی: تابع قسمت (ت) تمرین ۹ صفحه ۱۱۳ کتاب را در نظر بگیرید.)

۲) **(سوال ۸ صفحه ۱۲۵ کتاب دکتر شهشهانی)** فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر پیوسته است، $f(0) = f(1) = 0$، $f'(0) > 0$ و $f'(1) > 0$. نشان دهید معادله $f'(x) = 0$ در $]0,1[$ دست کم دو ریشه حقیقی دارد.

۳) **(سوال ۱۴ صفحه ۱۳۶ کتاب دکتر شهشهانی)**

(**الف**) فرض کنید I یک بازه باز و $f: I \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشد و در نقطه $x_0 \in I$، $f'(x_0) \neq 0$. نشان دهید بازه بازی مانند J، حول x_0 وجود دارد که $J \subset I$ و اگر دامنه f را به J محدود کنیم تابع حاصل وارون پذیر است.

(**ب**) یک منحنی در صفحه xy به صورت

$$\begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases}$$

داده شده است که α و β تابع‌های متغیر t هستند. مثلا ممکن است t زمان و $(x, y) = \big(\alpha(t), \beta(t)\big)$ مکان یک ذره در زمان t باشد. حال فرض کنید α و β روی بازه I تعریف شده و مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته‌اند و به ازای $t = t_0$، یک نقطه درونی I، داشته باشیم $\alpha'(t_0) \neq 0$.

نشان دهید بازه‌ای باز چون J حول t_0 وجود دارد که $J \subset I$ و مجموعه

$$\left\{(x, y) = \big(\alpha(t), \beta(t)\big) \mid t \in J\right\}$$

نمودار یک تابع مشتق پذیر مانند $y = f(x)$ است و برای $t \in J$،

$$f'\big(\alpha(t)\big) = \frac{\beta'(t)}{\alpha'(t)}$$

یا معادل آن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

به همین ترتیب، اگر به ازای هر نقطه درونی $t = t_0$ از I داشته باشیم $\beta'(t_0) \neq 0$ حکم مشابهی بیان و ثابت کنید.

٤) (**سوال ۷ صفحه ۱۴۶ کتاب دکتر شهشهانی**) فرض کنید I یک مجموعه باز و تابع $f: I \to \mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر باشد. به این ترتیب، دو تابع $f': I \to \mathbb{R}$ و $f'': I \to \mathbb{R}$ تعریف شده‌اند و می‌توان مشتق‌پذیر بودن f'' را دوباره بررسی کرد. اگر f'' در نقطه a از I مشتق‌پذیر باشد، می‌گوییم f در نقطه a سه بار مشتق‌پذیر است و مشتق سوم f در نقطه a را با $f'''(a)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید تابع $f: I \to \mathbb{R}$ روی I سه بار مشتق پذیر پیوسته باشد، a و b دو نقطه از I باشند که $a < b$، $f(a) = f(b) = 0$ و $f'(a) = f'(b) = 0$. ثابت کنید نقطه‌ای بین a و b مانند c وجود دارد که $f'''(c) = 0$.

به همین ترتیب، می‌توان وجود مشتق مرتبه nام تابع f را در نقطه‌ای مانند a مطرح کرد. لازم است مشتق مرتبه $(n-1)$ام روی بازه‌ای حول a وجود داشته باشد و این تابع در نقطه a مشتق‌پذیر باشد. مشتق nام تابع f در نقطه a را با $f^{(n)}(a)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ روی $\mathbb{R}$ از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر عدد صحیح مانند m، $f(m) = 0$. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی مانند k مجموعه‌ای نامتناهی از اعداد حقیقی مانند S_k وجود دارد که به ازای هر x در S_k، $f^{(k)}(x) = 0$.

۵) **(سوال ۸ صفحه ۱۵۵ کتاب دکتر شهشهانی)** فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دو بار مشتق پذیر باشد و به ازای هر x، $f''(x) > 0$. هدف این تمرین این است که ثابت کنیم چنین تابعی از بالا کران‌دار نیست.

(الف) فرض کنید نقطه‌ای مانند x_0 وجود دارد که $f'(x_0) > 0$. ثابت کنید $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(راهنمایی: مقدار تابع را با مقدار نظیر روی خط مماس مقایسه کنید.)

(ب) فرض کنید نقطه‌ای مانند x_0 وجود داشته باشد که $f'(x_0) < 0$. ثابت کنید

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

٦) **(سوال ۱۲ صفحه ۱۵۶ کتاب دکتر شهشهانی)** $f:]0, \infty[\to \mathbb{R}$ تابعی دوبار مشتق‌پذیر است که $f''(x) > 0$ برای هر $x > 0$. تابع $g:]0, \infty[\to \mathbb{R}$ را به صورت $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید اگر مشتق g در نقطه $a > 0$ صفر شود، a یک نقطه مینیمم موضعی برای g است. نتیجه بگیرید که مشتق g در حداکثر یک نقطه صفر می‌شود.

۷) **(سوال ۳ صفحه ۱۶۳ کتاب دکتر شهشهانی)** دایره‌ای داده شده است.

(الف) ثابت کنید در میان مستطیل‌های محاط در این دایره، مربع بیشترین مساحت ممکن را دارد.

(ب) ثابت کنید در میان مثلث‌های متساوی‌الساقین محاط در این دایره، مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین مساحت ممکن را دارد.

۸) **(سوال ۱۴ صفحه ۱۶۴ کتاب دکتر شهشهانی)** دو دالان عمود بر هم با عرض‌های a و b، $0 < a < b$، در نظر بگیرید. می‌خواهیم میله‌ای به طول l را در حالت افقی از دالان به عرض b به دالان به عرض a ببریم. بزرگترین طول l_0 را پیدا کنید که اگر $l < l_0$، این کار میسر باشد. (این مساله از معروف‌ترین مسائل بهینه‌سازی است. در حقیقت، باید مینیمم طول‌هایی را پیدا کنید که برای آن‌ها این کار میسر نباشد.)

۹) **(سوال ۱۰ صفحه ۱۷۷ کتاب دکتر شهشهانی)** فرض کنید n عددی طبیعی باشد و تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ثابت کنید تابع f در نقطه 0، n بار مشتق‌پذیر است و

$$f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$$

اما در نقطه 0 مشتق $(n+1)$ام ندارد. (راهنمایی: از استقرا استفاده کنید.) آیا 0 نقطه ماکسیمم موضعی f است؟ نقطه مینیمم موضعی چطور؟ نقطه عطف چطور؟ نمودار f را رسم کنید.