

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

تعداد سوالها: ۹

پاییز ۱۳۹۸

ریاضی عمومی ۱

تمرین‌های سری چهارم

(۱) سوال ۲ صفحه ۶۶ از کتاب دکتر شهشهانی) فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد و تابع $p(x) = x^n$ را در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید p در هر نقطه \mathbb{R} پیوسته است.

(ب) آیا p به طور یکنواخت پیوسته است؟

(۲) (سوال ۹ صفحه ۶۷ کتاب دکتر شهشهانی) تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده است. تابع $|f|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را چنین تعریف می‌کنیم؛

$$|f|(x) = |f(x)|.$$

ثابت کنید که اگر f در نقطه‌ای پیوسته باشد، $|f|$ نیز در آن نقطه پیوسته است. آیا عکس این مطلب نیز درست است؟

(۳) (سوال ۱۰ صفحه ۶۷ کتاب دکتر شهشهانی) در باره تابع $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ می‌دانیم که به ازای عددی غیرمنفی مانند L و به ازای هر دو عدد در S مانند x_1 و x_2 ،

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

ثابت کنید f به طور یکنواخت پیوسته است.

(۴) (سوال ۱۱ صفحه ۶۷ کتاب دکتر شهشهانی) فرض کنید $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه x_0 پیوسته و $f(x_0) > 0$.

ثابت کنید عددی مثبت مانند δ وجود دارد که اگر $x \in S$ و $|x - x_0| < \delta$ ، آن‌گاه $f(x) > 0$.

(۵) (سوال ۳ صفحه ۷۳ کتاب دکتر شهشهانی) ثابت کنید تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$ به طور یکنواخت پیوسته‌اند.

(۶) (سوال ۸ صفحه ۸۳ کتاب دکتر شهشهانی) ثابت کنید اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد، $f \circ f$ نزولی اکید نیست.

(۷) (سوال ۹ صفحه ۸۳ کتاب دکتر شهشهانی) ثابت کنید اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و نزولی باشد، نقطه‌ای مانند x_0 وجود دارد که $f(x_0) = x_0$.

(۸) (سوال ۱۰ صفحه ۸۳ کتاب دکتر شهشهانی) فرض کنید $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و $f(0) = f(1)$.

(الف) ثابت کنید عددی مانند x وجود دارد که $0 \leq x < x + \frac{1}{2} \leq 1$ و

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

راهنمایی: تابع g را به صورت $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$ در نظر بگیرید.

(ب) ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n ، نقطه‌ای مانند x وجود دارد که $0 \leq x < x + \frac{1}{n} \leq 1$ و

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

(۹) (سوال ۱۱ صفحه ۸۳ کتاب دکتر شهشهانی) (سوال ۱۱ صفحه ۸۳ کتاب دکتر شهشهانی) فرض کنید تابع

f روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ ثابت کنید:

(الف) نقطه‌ای در بازه $[a, b]$ مانند A وجود دارد که

$$f(A) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n)).$$

(ب) اگر f نامنفی باشد، نقطه‌ای در بازه $[a, b]$ مانند G وجود دارد که

$$f(G) = \sqrt[n]{f(x_1) \cdots f(x_n)}.$$