به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

ریاضی عمومی ۱ — تعداد سوال‌ها: ۵

تمرین‌های سری دوازدهم — زمستان ۱۳۹۸

---

۱) (سوال ۸ صفحه ۳۲۶ کتاب دکتر شهشهانی) در مورد هر یک از سری‌های زیر تعیین کنید همگراست یا واگرا.

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

(ث) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cdot 2^n+1}{3^n+1}$

(ج) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$، که در آن $p>0$.

(چ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(د) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$

(ژ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!+1}$

(س) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))^p}$، که در آن $p>0$. (دو حالت $p>0$ و $p\leq 1$ را جداگانه بررسی کنید.)

۲) (سوال ۵ صفحه ۳۲۶ کتاب دکتر شهشهانی) فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ دو سری همگرا با جمله‌های نامنفی باشند.

(الف) ثابت کنید $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_n)$ همگراست.

(ب) فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ با یک مثال نشان دهید که لازم نیست $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_n)$ برابر با AB باشد.

۳) (سوال ۱ صفحه ۳۳۲ کتاب دکتر شهشهانی) در مورد هر یک از سری‌های زیر تعیین کنید که سری به طور مطلق و عادی همگرا هست یا نیست.

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt[3]{4n-3}}$

(ت) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

ح) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-n)^n}$

خ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{n}\right)^n$

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

٤) (**سوال ۴ صفحه ۳۴۹ کتاب دکتر شهشهانی**) در مورد هر یک از سری‌های توانی زیر شعاع همگرایی را مشخص کنید و تابعی را که روی بازه همگرایی تعریف می‌کند شناسایی کنید.

ب) $x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} + \cdots$

پ) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n}$

ت) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$

ث) $x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \cdots$

٥) (**سوال ۱۲ صفحه ۳۵۱ از کتاب دکتر شهشهانی**) فرض کنید تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در هر نقطه از هر مرتبه مشتق داشته باشد و عددی طبیعی مانند N و عددی مثبت مانند K وجود داشته باشد که به ازای هر عدد حقیقی مانند x، اگر $n \geq N$،

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq K|x|^n.$$

ثابت کنید سری تیلور تابع f حول هر نقطه در $\mathbb{R}$ به تابع f همگراست.