به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

ریاضی عمومی ۱ — تعداد سوال‌ها: ۸

تمرین‌های سری یازدهم — زمستان ۱۳۹۸

---

۱) **(سوال ۲ صفحه ۲۵۶ کتاب دکتر شهشهانی)** انتگرال‌های نامعین زیر را حساب کنید.

(الف) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

(ت) $\int xe^{x}(\sin x + \cos x)dx$

۲) **(سوال ۵ صفحه ۲۵۶ کتاب دکتر شهشهانی)** ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = 1$$

۳) **(سوال ۱۵ صفحه ۲۵۷ کتاب دکتر شهشهانی)** توابع $\sinh$ و $\cosh$ یک به یک هستند، بنابراین تابع‌های وارون

$$\sinh^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tanh^{-1}:]-1,1[\to \mathbb{R}$$

تعریف شده‌اند. همچنین اگر دامنه $\cosh$ را به $[0,\infty[$ محدود کنیم، تابع وارون

$$\cosh^{-1}: [1,\infty[\to \mathbb{R}$$

تعریف می‌شود.

(الف) دستورهای زیر را برای مشتق توابع وارون هذلولوی ثابت کنید:

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}$$

٤) **(سوال ۱۷ صفحه ۲۵۷ از کتاب دکتر شهشهانی)** انتگرال‌های زیر را با استفاده از جایگزینی تابع‌های هذلولوی محاسبه کنید و نتیجه را با تابع اولیه به دست آمده از روش‌های پیشین مقایسه کنید.

(ت) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$ که در آن $a > 0$.

(ث) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$ که در آن $a > 0$.

۵) **(سوال ۲۱ صفحه ۲۵۸ کتاب دکتر شهشهانی)** تابع $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

(سعی نکنید انتگرال را محاسبه کنید.)

(الف) مشتق‌های اول و دوم F را محاسبه کنید و نمودار F را رسم کنید.

(ب) قرار می‌دهیم $E = F(1)$، نشان دهید

$$\sqrt[4]{e} < E < \frac{1+e}{2}$$

(پ) نشان دهید F دارای وارون ترکیبی مشتق‌پذیر $F^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ است و $(F^{-1})'(E)$ را محاسبه کنید.

٦) **(سوال ۳ صفحه ۲۸۱ کتاب دکتر شهشهانی)** در هر مورد همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره داده شده را تعیین کنید:

(ب) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+x^2+1}} dx$

(ث) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+x}} dx$

۷) **(سوال ۵ صفحه ۲۸۱ کتاب دکتر شهشهانی)** در هر مورد همگرایی یا واگرایی انتگرال ناسره داده شده را تعیین کنید:

(پ) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\ln x} dx$

(ت) $\int_0^1 \frac{1}{\ln x} dx$ (در $x = 0$ برای $\frac{1}{\ln x}$ مقدار صفر را منظور کنید).

۸) **(سوال ۱۸ صفحه ۲۸۳ کتاب دکتر شهشهانی)** تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به صورت $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ را در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید $\lim_{x \to +\infty} \int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$، اما $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ همگرا نیست.

(ب) ثابت کنید برای هر عدد حقیقی مانند r، عدد مثبت s وجود دارد که $\lim_{x \to +\infty} \int_{-sx}^{x} f(t)dt = r$