به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

ریاضی عمومی ۱ — تعداد سوال‌ها: ۹

تمرین‌های سری دهم — پاییز ۱۳۹۸

---

۱) (**سوال ۸ صفحه ۲۱۲ کتاب دکتر شهشهانی**) برای تابع $g:]\varepsilon,1[\to\mathbb{R}$، $g(x)=\frac{1}{x^p}$، که در آن p عددی گویا و مثبت است، و ε عددی داده شده، مثبت و کوچکتر از 1 است، $\int_\varepsilon^1 g$ را حساب کنید. ثابت کنید $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 g$ متناهی است، اگر و فقط اگر $p<1$.

۲) (**سوال ۱۷ صفحه ۲۲۵ کتاب دکتر شهشهانی**) در این تمرین حکمی معروف به قضیه مقدار بینی داریو را ثابت می‌کنیم که از آن مثلا نتیجه می‌شود تابعی پله‌ای مانند

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\\ \text{دلخواه} & x=0\end{cases}$$

ممکن نیست مشتق تابعی مشتق‌پذیر باشد. تابع f روی هر بازه مانند $[a,b]$ انتگرال پذیر است، اما $F(x)=\int_a^x f$ در نقطه 0 مشتق‌پذیر نیست. به طور کلی فرض کنید I یک بازه باشد و تابع $g:I\to\mathbb{R}$ روی I مشتق‌پذیر باشد و a و b دو نقطه I باشند که $a<b$. دو تابع h و k را روی بازه $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} & x>a\\ g'(a) & x=a\end{cases}$$

$$k(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-g(b)}{x-b} & x<b\\ g'(a) & x=b\end{cases}$$

(**الف**) ثابت کنید h و k روی $[a,b]$ پیوسته‌اند.

(**ب**) فرض کنید $g'(a)=A$ و $g'(b)=B$ و C عددی بین A و B باشد. از قسمت (الف) نتیجه بگیرید که نقطه‌ای مانند c بین a و b وجود دارد که $g'(c)=C$ (توجه کنید $h(b)=k(a)$).

۳) (**سوال ۶ صفحه ۲۲۶ از کتاب دکتر شهشهانی**) (**الف**) بدون آن‌که تابع اولیه $\sin^{-1}x$ را حساب کنید ثابت کنید

$$\int_0^1 \sin^{-1}x\,dx=\frac{\pi}{2}-1$$

(راهنمایی: به نمودار $\sin t$ روی $[0,\frac{\pi}{2}]$ نگاه کنید.)

(ب) با استفاده از راهنمایی قسمت (الف) تابع اولیه‌ای برای $\sin^{-1} x$ پیدا کنید.

٤) (سوال ۸ صفحه ۲۲۶ کتاب دکتر شهشهانی) **(الف)** با فرض این‌که مساحت قرص به شعاع R برابر πR^2 باشد، ثابت کنید

$$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{\pi R^2}{2}$$

(ب) فرض کنید a و b اعدادی حقیقی باشند و $0<b<a$. قرص به شعاع b و به مرکز $(0,a)$، یعنی مجموعه

$$\{(x,y): x^2+(y-a)^2\leq b^2\}$$

را یک دور کامل در فضا حول محور x دوران می‌دهیم. جسم حاصل چنبره توپر نام دارد. ثابت کنید حجم چنبره توپر $(2\pi a)(\pi b^2)$ است.

٥) (سوال ۵ صفحه ۲۳۴ کتاب دکتر شهشهانی) تابع مشتق پذیر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ همه‌جا مشتق منفی دارد و $f(0)=1$، اگر وارون f را با f^{-1} نمایش دهیم، مشتق وارون f به صورت

$$\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{-x^2-1}{x^4+2x^2+3}$$

است. انتگرال $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$ را حساب کنید.

٦) (سوال ۱۱ صفحه ۲۳۵ کتاب دکتر شهشهانی) تابع اولیه توابع زیر را حساب کنید.

(الف) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}$، به ازای $x>0$.

(ب) $\frac{1}{\sqrt{x^{n+1}-x^{2n}}}$، به ازای $x\in]0,1[$.

(پ) $\frac{1}{x(\ln x)(\ln(\ln x))}$، به ازای $x>e$.

(ت) $\frac{\cot x}{\ln(\sin x)}$، به ازای $0<x<\pi$.

۷) (سوال ۱۲ صفحه ۲۳۵ کتاب دکتر شهشهانی) فرض کنید a و b اعداد حقیقی باشند، $0<a<b$ و $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد که به ازای هر x در $[a,b]$، $f'(x)<0$. ناحیه محصور بین نمودار f، خط قائم $x=a$ و خط افقی $y=f(b)$ را حول محور y دوران می‌دهیم. ثابت کنید حجم جسم به دست آمده از دوران برابر است با

$$2\pi\int_a^b\left(f(x)-f(b)\right)x\,dx$$

۸) (**سوال ۱ صفحه ۲۴۵ کتاب دکتر شهشهانی**) برای هر یک از توابع بیان شده با عبارت‌های گویای زیر، تابع اولیه‌ای در دامنه تعریف پیدا کنید.

پ) $\frac{x^2+1}{x^4+x^3}$

ت) $\frac{x^3}{x^4+x^2+1}$

ث) $\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ که در آن a، b و c اعدادی حقیقی‌اند. سه حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$a = b = c$$
$$a = b \neq c$$
$$a \neq b, a \neq c, b \neq c$$

چ) $\frac{1}{x^4+1}$

۹) (**سوال ۲ صفحه ۲۴۵ کتاب دکتر شهشهانی**) با استفاده از اتحادهای مثلثاتی

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \tan x = \frac{2t}{1+t^2}$$

که در آن $t = \tan\frac{x}{2}$ انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

ت) $\int \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$