۱ ـ الف)

$$|z|^2 z^3 - \bar{z} = 0 \Rightarrow \bar{z} z . z^3 - \bar{z} = 0 \Rightarrow \bar{z}(z^4 - 1) = 0$$ ۴

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{z} = 0 \Rightarrow z = 0 \\ z^4 - 1 = 0 \rightarrow z^4 = 1 \end{cases}$$ ۲

بدست آوردن ریشه‌ها $z^4 = 1$:

$$z^4 = 1 \Rightarrow z^4 = e^{2k\pi i} \Rightarrow z = e^{\frac{k\pi i}{2}} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$$k = 0 \rightarrow z = 1$$ ۴
$$k = 1 \rightarrow z = i$$
$$k = 2 \rightarrow z = -1$$
$$k = 3 \rightarrow z = -i$$

ب)

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|2 - z|}{|2z|} < \frac{1}{2}$$

۱۰

$$\Leftrightarrow |2 - z| < |z| \Leftrightarrow 4 - 4Re(z) + |z|^2 < |z|^2$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم

$$\Leftrightarrow 4 - 4Re(z) < 0 \Leftrightarrow Re(z) > 1$$

* برای قسمت ب به نسبت درستی راه حل نمره داده شده است.

۲- الف) برای آنکه نشان دهیم u تابعی همساز روی $\mathbb{R}^2$ است، باید نشان دهیم:

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$ ۲/۵

$$u(x,y)=x^2-y^2-2x \Rightarrow \begin{cases} u_x=2x-2 \Rightarrow u_{xx}=2 \\ u_y=-2y \Rightarrow u_{yy}=-2 \end{cases}$$ ۲/۵ ۲/۵

$$\Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=2+(-2)=0$$ ۲/۵

بنابراین u روی $\mathbb{R}^2$ تابعی همساز است.

ب) اگر $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ مزدوج همساز u روی $\mathbb{R}^2$ باشد، آنگاه u و v در روابط کوشی-ریمان صدق می‌کنند

یعنی
$$\begin{cases} u_x=v_y \\ u_y=-v_x \end{cases}$$ ۵

حال

$$u_x=2x-2 \Rightarrow v_y=2x-2 \Longrightarrow v=2xy-2y+C$$

از طرفین نسبت به y انتگرال می‌گیریم

چون $v(0,0)=1$، پس

$$v(0,0)=C=1$$

۵

بنابراین

$$v(x,y)=2xy-2y+1$$

۳- نگاشت موبیوسی بصورت زیر می‌سازیم:

$$\left.\begin{array}{l} z_1=-1 \longrightarrow w_1=1+i \\ z_2=i \longrightarrow w_2=0 \\ z_3=\infty \longrightarrow w_3=1 \end{array}\right\}$$

۲

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

۴

جایگذاری
$$\Longrightarrow \frac{w-(1+i)}{w-1}\cdot\frac{-1}{-(1+i)}=\frac{z+1}{i+1}$$

$$\Longrightarrow \frac{w-(1+i)}{w-1}=z+1 \Longrightarrow w-1-i=wz+w-z-1$$

۲

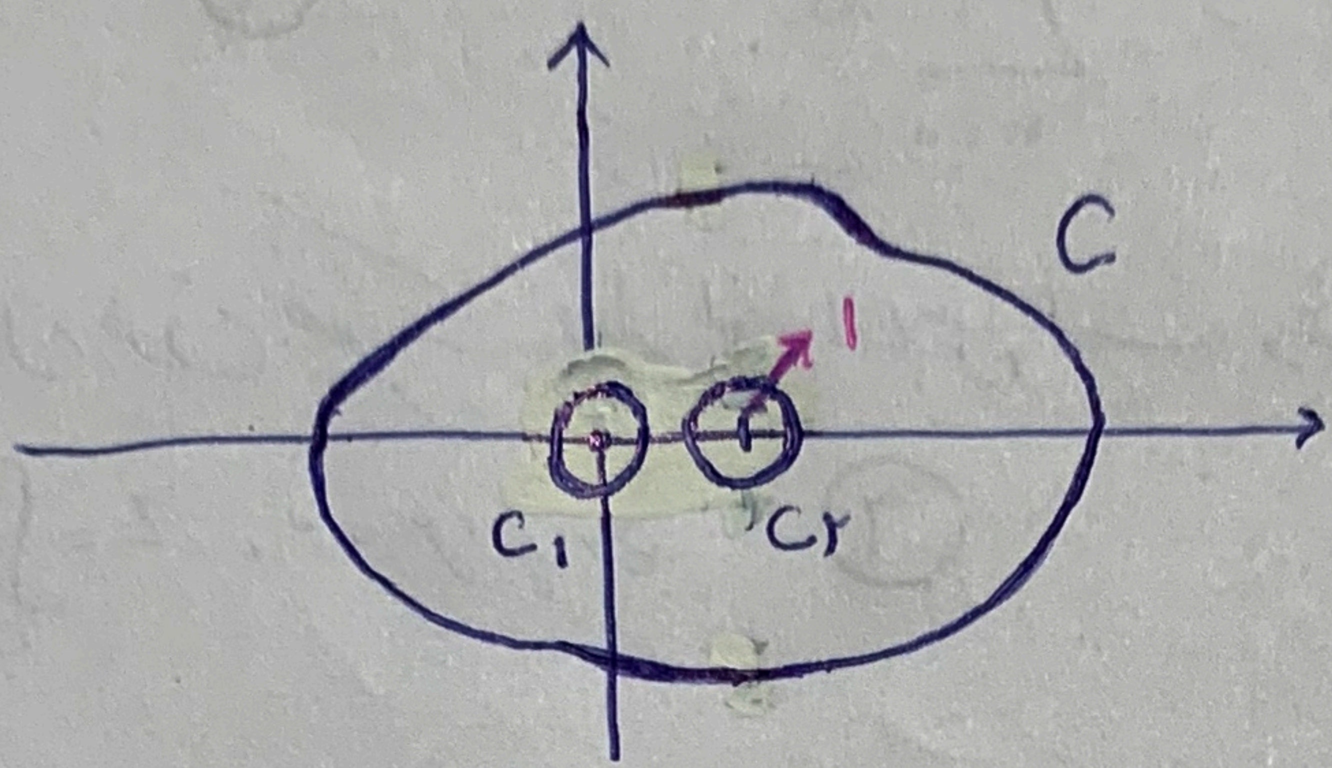
$$\Longrightarrow z-i=wz \Longrightarrow w=\frac{z-i}{z}$$

حال نقطه $z=2i$ را از ناحیه D_1 در نظر بگیرید، تصویر آن تحت نگاشت فوق $w=\frac{1}{2}$ می‌باشد که $w=\frac{1}{2}$ درون دایره (ناحیه D_2) واقع است و چون نگاشت موبیوس یک به یک و پوشا است پس D_1 به D_2 بصورت یک به یک و پوشا تحت نگاشت فوق تصویر می‌شود. ۲

۴- فرض کنید C خمی ژردان و قطعه به قطعه هموار در صفحه مختلط است و C_1 ، C_2 ، ... ، C_n خم‌های ژردان قطعه به قطعه هموار‌ای داخل C هستند که داخل هیچ کدام از خم‌های C_i و C_j نقطه‌ای مشترکی وجود ندارد. فرض کنید R مجموعه نقاط روی و داخل C به استثنای نقاط داخل هر یک از C_n هاست. اگر تابع f روی R تحلیلی باشد، آنگاه

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)\,dz$$

شکل فرض



۳

در نتیجه

$$I = \int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} \frac{\frac{e^z}{(z-1)^2}}{z}\,dz + \int_{C_2} \frac{\frac{e^z}{z}}{(z-1)^2}\,dz \quad (*)$$

۲

گام اول:

$$I_1 = \int_{C_1} \frac{\frac{e^z}{(z-1)^2}}{z}\,dz$$

برای محاسبه I_1 ، از فرمول انتگرال کوشی $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)}\,d\xi$ ، بدست می‌آوریم

$$I_1 = 2\pi i \left.\frac{e^z}{(z-1)^2}\right|_{z=0} = 2\pi i$$

۲

گام دوم:

$$I_2 = \int_{C_2} \frac{\frac{e^z}{z}}{(z-1)^2}\,dz$$

برای محاسبه I_2 ، از فرمول مشتق $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\,d\xi$ ، خواهیم داشت

$$I_2 = 2\pi i \left.\left(\frac{e^z}{z}\right)'\right|_{z=1} = 2\pi i \left.\frac{e^z z - e^z}{z^2}\right|_{z=1} = 0$$

۲

در آخر، برای $(*)$ داریم

$$I = \int_C f(z)\,dz = I_1 + I_2 = 2\pi i + 0 = 2\pi i$$

۱

۵ - الف)

$$f(z) = \frac{1}{z^4\left(\frac{1}{z}-1\right)} = \frac{-1}{z^4\left(1-\frac{1}{z}\right)}$$ (۲)

$|z|>1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1$ ، در نتیجه سری لوران $f(z)$ بصورت زیر خواهد بود. (۲)

$$-\frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+4)}$$ (۶)

ب) با توجه به سری لوران فوق صفر یک نقطه تکین اساسی است و ضریب z^{-1} در این سری صفر است. (۴)
در نتیجه حاصل $\int_c f(z)dz$ ، صفر خواهد بود. (۶)

ج) برای c با این مشخصات هم شامل نقطه صفر و هم شامل نقطه یک می باشد. پس با استفاده از قضیه ی مانده ها

$$\int_c f(z)\,dz = 2\pi i\left(Res(f,0) + Res(f,1)\right)$$ (۲)

صفر یک قطب مرتبه ی ۳ است. در نتیجه

$$Res(f,0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2} z^3 \cdot \frac{1}{z^3(1-z)} = 1$$ (۳)

یک، قطب مرتبه ۱ است. در نتیجه

$$Res(f,1) = \frac{1}{3z^2-4z^3}\Big|_{z=1} = -1$$ (۳)

بنابراین حاصل انتگرال با استفاده از قضیه ی مانده ها، به صورت زیر خواهد بود.

$$\int_c f(z)\,dz = 2\pi i\left(1+(-1)\right) = 0$$ (۲)

۶- چون تابع زیر انتگرال زوج است، پس

$$I=\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}\,dx. \quad ①$$

۲

برای محاسبه‌ی انتگرال فوق با استفاده از قضیه‌ی کتاب، خواهیم داشت:

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}}{x^2+a^2}\,dx=2\pi i\sum\Big(\text{مانده‌های تابع } \frac{e^{i\lambda z}}{z^2+a^2} \text{ در نقاط تکین واقع در نیم صفحه بالایی}\Big).$$

۳

درنتیجه

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}}{x^2+a^2}\,dx=2\pi i\Big(\text{مانده } \frac{e^{i\lambda z}}{z^2+a^2} \text{ در نقطه‌ی } z=ia\Big)$$

می‌دانیم $a>0$.

$$=2\pi i\left.\frac{e^{i\lambda z}}{2z}\right|_{z=ia}$$

$$=2\pi i\,\frac{e^{i\lambda(ia)}}{2(ia)}=\frac{\pi}{a}e^{-\lambda a}$$

۳

$$\Rightarrow \left(P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}\,dx\right)+i\left(P.V.\cancelto{0}{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{x^2+a^2}\,dx}\right)=\frac{\pi}{a}e^{-\lambda a} \quad ②$$

چون $\lambda>0$، این تابع فرد است.

۲

$$\overset{①,②}{\Longrightarrow}\int_0^\infty\frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi}{2a}e^{-\lambda a}$$