سوال ۱

$$y' = \frac{-ty}{2t^2+3y^2-20}$$

$$\Longrightarrow \quad ty + (2t^2+3y^2-20)\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{(ty)}_{M}dt + \underbrace{(2t^2+3y^2-20)}_{N}dy = 0$$

۳ نمره

$$\frac{\partial M}{\partial y} = t \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial t} = 4t$$

چون $M_y \neq N_t$ $\Longleftarrow$ معادله دقیق نیست.

معادله عامل انتگرال ساز $\mu = \mu(y)$ دارد.

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{N_t - M_y}{M} = \frac{3}{y} \Longrightarrow \mu = y^3$$

۴ نمره

حال معادله $(\mu M)dt + (\mu N)dy = 0$ دقیق است.

$$(\mu M)dt + (\mu N)dy = (ty^4)dt + (2t^2y^3+3y^5-20y^3)dy = 0$$

بدنبال جواب بصورت $\varphi(t,y) = c$ هستیم.

$$\varphi_t = ty^4 \quad , \quad \varphi_y = 2t^2y^3 + 3y^5 - 20y^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_t = t y^{4} \\ \varphi_y = 2t^{2}y^{3} + 3y^{5} - 20y^{3} \end{cases} \Longrightarrow \varphi(t,y) = \frac{t^{2}y^{4}}{2} + h(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_y = 2t^{2}y^{3} + h'(y)$$

$$h'(y) = 3y^{5} - 20y^{3}$$

۵ نمره

$$\Longrightarrow h(y) = \frac{y^{6}}{2} - \frac{5y^{4}}{1} + k$$

$$\Longrightarrow \varphi(t,y) = \frac{t^{2}y^{4}}{2} + \frac{y^{6}}{2} - \frac{5y^{4}}{1} = C$$

جواب مسئله است. با اعمال شرط اولیه $y(3)=1$ یعنی:

$t=3 \Longrightarrow y=1$ داریم:

$$\frac{3^{2}1^{4}}{2} + \frac{1^{6}}{2} - \frac{5\,1^{4}}{1} = C \Longrightarrow C = 0$$

۱ نمره

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{t^{2}y^{4}}{2} + \frac{y^{6}}{2} - \frac{5y^{4}}{1} = 0}$$

۲ نمره

$$\Rightarrow y = \sqrt{10 - t^{2}}$$

(۲)

سوال ۲

$$y' + ty = ty^3 \quad (y>0)$$

$$y^{-3}y' + ty^{-2} = t \qquad u = y^{-2} \Rightarrow u' = -2y'y^{-3}$$

۵ نمره

$$\Rightarrow -\frac{u'}{2} + tu = t \Rightarrow u' - 2tu = -2t$$

عامل انتگرال ساز $\mu(t) = e^{-t^2}$ است. پس

$$(\mu(t)u)' = -2t\,\mu(t) \Rightarrow (e^{-t^2}u)' = -2te^{-t^2}$$
$$= (e^{-t^2})'$$

۷ نمره

$$\Rightarrow e^{-t^2}u = e^{-t^2} + C \Rightarrow u = 1 + Ce^{t^2}$$

$$\Rightarrow y^{-2} = 1 + Ce^{t^2} \Rightarrow y = y(t) = \frac{1}{(1+Ce^{t^2})^{1/2}}$$

سوال ۳

$$y'' - \frac{t(t+2)}{t^2}y' + \frac{t+2}{t^2}y = 0 \qquad (t>0)$$

طبق قضیه کتاب برای معادله مرتبه دوم خطی

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

۵ نمره

رونسکین W ، در معادله $W' + p(x)W = 0$ صدق می کند. پس:

$$W(t) = W[y_1, y_2](t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$$

$t_0 = 1$

$$\Longrightarrow \quad W(t) = e \cdot e^{\int_1^t 1+\frac{2}{s}\,ds}$$

$$= e\cdot e^{s+2\ln s \big|_1^t} = e\cdot e^{t+\ln t^2 - 1}$$

$$= e^t e^{\ln t^2} = t^2 e^t$$

۵ نمره

$$\Longrightarrow \quad W(t) = t^2 e^t$$

پس:

$$W(t) > 0 \quad \forall t > 0$$

سوال ۴

الف)

$$y_1(t)=t$$

۵ نمره

$$y_2(t)=y_1(t)\,u(t)=t\,u(t)$$

$$y_2'=u'y_1+y_1'u=u't+u \Rightarrow \boxed{y_2'=u't+u}$$

$$y_2''=u''y_1+2y_1'u'+y_1''u=u''t+2u' \Rightarrow \boxed{y_2''=u''t+2u'}$$

$$\Rightarrow (t^2-1)(u''t+2u')-2t(u'+u)+2ut=0$$

$$\Longrightarrow u''t(t^2-1)-2u'=0$$

$V=u'$ قرار میدهیم. پس:

$$V'-\frac{2}{t(t^2-1)}V=0$$

۵ نمره

$$\Rightarrow V=e^{\int \frac{2}{t(t^2-1)}dt}=e^{\int -\frac{2}{t}+\frac{2t}{t^2-1}\,dt}$$

$$\Rightarrow V=V(t)=e^{-2\ln t+\ln(t^2-1)}=e^{\ln\left(\frac{t^2-1}{t^2}\right)}=\frac{t^2-1}{t^2}$$

$$\Rightarrow u(t)=\int \frac{t^2-1}{t^2}\,dt=t+\frac{1}{t}$$

$$\Longrightarrow y_2(t)=y_1u=t\left(t+\frac{1}{t}\right)=t^2+1$$

ب)

$$y'' + \frac{-2t}{t^2-1} y' + \frac{2}{t^2-1} y = \underbrace{t^2-1}_{g(t)}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= t \\ y_2(t) &= t^2+1 \end{aligned} \implies W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} t & t^2+1 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2-1$$

حال طبق فرمول های تغییر پارامتر:

$$u_1'(t) = -\frac{g(t)\, y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)} = \frac{-(t^2-1)(t^2+1)}{t^2-1} = -t^2-1$$

$$\implies \boxed{u_1(t) = -\frac{t^3}{3} - t}$$

هزه

$$u_2'(t) = +\frac{g(t)\, y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)} = \frac{(t^2-1)(t)}{t^2-1} = t$$

$$\implies \boxed{u_2(t) = \frac{t^2}{2}}$$

$$\implies y_p = u_1(t)\, y_1(t) + u_2(t)\, y_2(t)$$

دس:

$$y_p = \left(-\frac{t^3}{3} - t\right)t + \frac{t^2}{2}(t^2+1)$$

$$= -\frac{t^4}{3} - t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y_p = \frac{t^4}{6} - \frac{t^2}{2}}$$

۵ نمره

ج)

$$y = c_1 t + c_2 (t^2+1) + y_p$$

$$= c_1 t + c_2 (t^2+1) + \frac{t^4}{6} - \frac{t^2}{2}$$

۵ نمره

سوال ۵

$$y'' + y = t\cos t - \cos t = (t-1)\cos t$$

$$y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

۵ نمره

$$y_p = t\left[(At+B)\cos t + (Ct+D)\sin t\right]$$

$$= A t^2 \cos t + B t\cos t + C t^2 \sin t + D t \sin t$$

$$y_p' = D\sin t + B\cos t + (2C-B)t\sin t + (D+2A)t\cos t - A t^2 \sin t + C t^2 \cos t$$

$$y_p'' = (2A+2D)\cos t + (2C-2B)\sin t + (4C-B)t\cos t + (-4A-D)t\sin t + (-A)t^2\cos t + (-C)t^2 \sin t$$

$$\Rightarrow y_p'' + y_p = (2D+2A)\cos t + (2C-2B)\sin t + (4C)t\cos t + (-4A)t\sin t = t\cos t - \cos t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2C - 2B = 0 \\ 2D + 2A = 1 \\ 4C = 1, \quad -4A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 0, \quad B = \frac{1}{4} \\ C = \frac{1}{4}, \quad D = -\frac{1}{4} \end{array}$$

پس :

$$y_p = \frac{1}{4}t^2 \sin t - \frac{1}{2}t \sin t + \frac{1}{4}t \cos t$$

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{t^2 \sin t}{4} - \frac{t \sin t}{2} + \frac{t \cos t}{4}$$

۱۰ نمره

روش دیگر :

$$y_p = t(At+B)e^{it}$$

۵ نمره

را جواب خصوصی $y'' + y = (t-1)e^{it}$ درنظر بگیریم. نهایتا $Re\{y_p\}$ جواب خصوصی خواهد بود.

$$y_p = B\,te^{it} + A\,t^2 e^{it}$$

$$y_p' = (2At+B)e^{it} + ie^{it}(At^2+Bt)$$

$$y_p'' = (2A)e^{it} + (2Bi)e^{it} + te^{it}(4Ai-B) + (-Ae^{it})t^2$$

$$\Rightarrow y_p'' + y_p = (4Ai)te^{it} + (2A+2Bi)e^{it} = (t-1)e^{it}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2A + 2Bi = -1 \\ 4Ai = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} A = \frac{-i}{4} \\ B = \frac{i}{2} + \frac{1}{4} \end{array}$$

پس

$$\operatorname{Re}\left\{ t\left(-\frac{i}{4}t + \frac{i}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{it} \right\}$$

جواب خصوصی است.

$$\operatorname{Re}\left\{ \left(-\frac{i}{4}t^2 + \frac{it}{2} + \frac{t}{4}\right)(\cos t + i\sin t) \right\}$$

$$= \operatorname{Re}\left\{ \left(\frac{t}{4} + i\left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{4}\right)\right)(\cos t + i\sin t) \right\}$$

$$= \frac{t\cos t}{4} + \frac{t^2\sin t}{4} - \frac{t\sin t}{2}$$ ۱۵ نمره

سوال ۶

$$4t\,y'' + 2y' + y = 0 \quad (t>0)$$

جواب را بصورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$y = y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}$$

هتره

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n t^{n+r-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-2}$$

در معادله قرار می‌دهیم :

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r) a_n t^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} 4(n+r+1)(n+r) a_{n+1} t^{n+r} + \sum_{n=-1}^{\infty} 2(n+r+1) a_{n+1} t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r} = 0$$

$$4r(r-1) a_0 t^{r-1} + 2r a_0 t^{r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ 4(n+r+1)(n+r) a_{n+1} + 2(n+r+1) a_{n+1}$$

$$+ a_n \Big\} t^{n+r} = 0$$

پس بایستی :

$$\left\{\begin{array}{l}\big(4r(r-1)+2r\big)a_0=0\\[2ex] 4(n+r+1)(n+r)a_{n+1}+2(n+r+1)a_{n+1}+a_n=0\end{array}\right.$$

۵ نمره

$$a_0\neq 0 \Longrightarrow 4r(r-1)+2r=0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} r=0\\ r=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

پس معادله، دو جواب بصورت

$$y_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\,t^n \quad , \quad y_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\tfrac{1}{2}\right)t^{n+\frac{1}{2}}$$

دارد و در نتیجه جواب عمومی بصورت $y=c_1y_1+c_2y_2$ است.

محاسبهٔ $a_n(0)$:

۴ نمره

$$4(n+1)n\,a_{n+1}(0)+2(n+1)a_{n+1}(0)+a_n(0)=0$$

$$\Longrightarrow 2(2n+1)(n+1)\,a_{n+1}(0)+a_n(0)=0$$

$$a_0(0)=1 \quad , \quad n=0 \Rightarrow 2a_1(0)+a_0(0)=0 \Rightarrow a_1(0)=-\frac{1}{2}$$

$$n=1 \Rightarrow \frac{a_2(0)}{a_1(0)}=\frac{-1}{2(2)(3)} \Rightarrow a_2(0)=\frac{1}{24}=\frac{1}{4!}$$

$$\frac{a_3(0)}{a_2(0)}=\frac{-1}{2(3)(5)} \Rightarrow a_3(0)=\frac{-1}{6!}$$

۱ نمره

$$\Longrightarrow \boxed{a_n(0) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}} \quad n=0,1,2,3,\cdots$$

محاسبهٔ $a_n(\frac{1}{2})$.

۴ نمره

$$4(n+\tfrac{3}{2})(n+\tfrac{1}{2})a_{n+1} + 2(n+\tfrac{3}{2})a_{n+1} + a_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}(\frac{1}{2})}{a_n(\frac{1}{2})} = \frac{-1}{2(n+1)(2n+3)}$$

$$a_0(\tfrac{1}{2})=1 \quad , \quad n=0 \Rightarrow \frac{a_1(\frac{1}{2})}{a_0(\frac{1}{2})} = \frac{-1}{(2)(1)(3)}$$

$$= \frac{-1}{6} = \frac{-1}{3!}$$

$$\frac{a_2(\frac{1}{2})}{a_1(\frac{1}{2})} = \frac{-1}{2(2)(5)} \Rightarrow a_2(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{5!}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a_n(\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}} \quad n=0,1,2,3,\cdots$$

۱ نمره

پس نهایتاً

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(0)\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^n$$

$$= \cos(\sqrt{t})$$

و

$$y_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\tfrac{1}{2}\right) t^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{n+\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sqrt{t})^{2n+1}$$

$$= \sin(\sqrt{t})$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = c_1 \cos(\sqrt{t}) + c_2 \sin(\sqrt{t})$$