



این آزمون دارای پنج سؤال است که در دو صفحه نوشته شده‌اند.

۱. جواب مسأله مقدار اولیه زیر را به کمک روش حدسی (تعیین ضرایب نامعین) پیدا کنید.

$$y^{(4)} + 2y'' + y = t \sin t, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y^{(3)}(0) = -0.25$$

۲. به کمک تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل زیر را با شرایط اولیه $y(0) = y'(0) = 0$ حل کنید.

$$y'' + 2y' + 2y = \begin{cases} \sin t & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \pi \leq t \end{cases}$$

۳. مقدار دو ماده شیمیایی x و y را در زمان t که در یک ظرف در حال واکنش هستند با $x(t)$ و $y(t)$ نمایش می‌دهیم. فرض می‌کنیم وزن این مواد در لحظه شروع واکنش به گرم برابر است با $x(0) = 1$ و $y(0) = 2$ و تغییرات وزن این مواد با دستگاه خطی زیر مدل می‌شود:

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -4x - 3y \end{cases}$$

الف- نشان دهید وزن ماده x در مسأله مقدار اولیه زیر صدق می‌کند و جواب این مسأله را به دست آورید.

$$x'' + x' - 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 4$$

ب- در لحظه $t = 1$ به مقدار ۲ گرم به ماده y در ظرف اضافه می‌کنیم. با نوشتن شرایط اولیه جدید برای معادله قسمت (الف) در بازه زمانی $1 \leq t$ و حل آن مقدار $x(2)$ را به دست آورید.

پ- می‌توان نشان داد که $x(t)$ در مسأله مقدار اولیه زیر صدق می‌کند. لزومی ندارد این مطلب را نشان دهید ولی با حل مسأله زیر مقدار $x(2)$ را بدین طریق نیز محاسبه کنید.

$$x'' + x' - 2x = 2\delta(t - 1) \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 4$$

ادامه سوالات در پشت ورقه:

۴. دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x' = -8x - y \\ y' = 4x - 12y \end{cases}$$

الف- نشان دهید اگر $(x(t), y(t))$ یک جواب دلخواه این دستگاه باشد، آنگاه

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

ب- ثابت کنید هر منحنی جواب $(x(t), y(t))$ وقتی $t \rightarrow +\infty$ به خط $y - 2x = 0$ مماس می‌شود.

۵. دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی ناهمگن زیر را در نظر بگیرید:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$$

الف- یک مجموعه اساسی جوابها برای قسمت همگن دستگاه خطی داده شده پیدا کنید.

ب- با شرط اولیه $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و به کمک روش تغییر پارامترها جواب دستگاه ناهمگن را پیدا کنید. (محاسبه انتگرالها و نوشتن فرمول صریح جواب نهایی الزامی است).

توزیع نمرات: هر سؤال ۲۰ نمره.

موفق باشید.