

۱. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که همه جا پیوسته و مثبت است. نشان دهید برای هر x_1, \dots, x_n ، عدد x_0 یافت می‌شود که $f(x_0) = (f(x_1) \cdots f(x_n))^{1/n}$. (۱۰ نمره)

۲. نقاط پیوستگی تابع $f(t) = \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ را بیابید. (x جزء صحیح عدد x است). (۱۰ نمره)

۳. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ همه جا مشتق پذیر است و $f'(x) = (x^2 \sin x) / (1 + x^4)$. نشان دهید برای هر a و b داریم $|f(a) - f(b)| \leq |a - b|/2$. (۱۵ نمره)

۴. فرض کنید نردبانی به طول l بر دیواری تکیه داده و در حال لیز خوردن است. اگر در لحظه‌ای مانند t فاصله پای نردبان از دیوار برابر x باشد و با سرعت a متر بر ثانیه در حال دور شدن از دیوار باشد، سرعت تغییرات (همان مشتق) ارتفاع سر دیگر نردبان که بر دیوار است در آن لحظه چقدر خواهد بود. (۱۰ نمره)

۵. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ همه جا مشتق پذیر است. نشان دهید x ای وجود دارد که $f(x)f'(x) < 1$. (۱۰ نمره)

۶. الف. همه جواب‌های $\sin x = x$ را بدست آورید. (۵ نمره)

ب. فرض کنید $a_n \in \mathbb{R}$ داده شده باشد و $a_{n+1} = \sin a_n$. نشان دهید دنباله $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ همگرا است و حد آن را بیابید. (۱۰ نمره)

موفق باشید