سؤال ۱: الف (۱ نمره)

$$|\alpha|=|\beta|=1 \Rightarrow \alpha=\cos\theta+i\sin\theta\ ,\quad \beta=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

$$\alpha+\beta=-1 \Rightarrow \sin\theta=-\sin\varphi \Rightarrow \begin{cases} \varphi=\pi+\theta \Rightarrow \cos\varphi=-\cos\theta \Rightarrow \alpha+\beta=0 \quad \times \\ \varphi=-\theta \Rightarrow \cos\varphi=\cos\theta \Rightarrow \alpha=\bar{\beta} \end{cases}$$

(۱ نمره) (۱ نمره)

$$\Rightarrow 2\cos\theta=-1 \Rightarrow \cos\theta=-1/2 \Rightarrow \theta=\frac{2}{3}\pi \text{ یا } -\frac{2}{3}\pi$$

(φ زاویه دیگر از این دو زاویه) (۱ نمره)

بنابراین تنها اعداد مختلط که در فرض مسئله صدق می‌کنند عبارتند از $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (۱ نمره)

(دو ریشه سوم واحد)

ب: اگر یکی از این اعداد مختلط صفر باشد بقیه نیز باید صفر باشد (چون $|z_1|=|z_2|=|z_3|$) و در این حالت $\gamma=0$ است. (۱ نمره)

اگر این اعداد ناصفر باشند داریم:

$$z_1+z_2+z_3=0 \Rightarrow z_3\left(\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_3}+1\right)=0$$ (۲ نمره)

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_3}=-1 \\ &|z_1|=|z_2|=|z_3| \Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_3}\right|=\left|\frac{z_2}{z_3}\right|=1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{طبق قسمت اول}} \frac{z_1}{z_3}=\omega\ ,\ \frac{z_1}{z_2}=\omega^2$$

(۱ نمره) (۱ نمره)

$$\Rightarrow \{z_1, z_2, z_3\}=\{z_3\omega, z_3\omega^2, z_3\cdot 1\}$$

سؤال ۲.

(۲ نمره)

ابتدا توجه می‌کنیم با توجه به تعریف دنباله داریم:

$$a_1=\sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n} \quad (n\geq 1)$$

این دنباله صعودی است: (۲ نمره)

(اثبات با استقرا) واضح است که $a_1<a_2$. اگر $a_{n-1}<a_n$ آنگاه

$$a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}<\sqrt{2+a_n}=a_{n+1}$$

بنابراین برای هر n داریم $a_n<a_{n+1}$

این دنباله کران‌دار است و داریم $a_n<2$: (۲ نمره)

(اثبات با استقرا) واضح است که $a_1=\sqrt{4}<2$. اگر $a_{n-1}<2$ آنگاه

$$a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}<\sqrt{2+2}=2$$

بنابراین برای هر n داریم $a_n<2$

هر دنباله صعودی کران‌دار همگرا به کوچکترین کران بالای آن است که آن را α می‌نامیم. (۲ نمره) با توجه به خواص حد دنباله‌ها و حدگیری از رابطه $a_{n+1}^2=2+a_n$ بدست می‌آید که $\alpha^2=2+\alpha$. این معادله دارای دو جواب 2 و -1 است و چون اعضای دنباله a_n مثبت‌اند مقدار -1 برای حد قابل قبول نیست. (۲ نمره) در نتیجه حد این دنباله 2 است.

سوال ۲: (راه حل دوم)

ابتدا توجه می‌کنیم که $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ (۲ نمره) و دنباله a_n کران‌دار است (۲ نمره) مثلاً $(a_n<2)$:

اثبات با استقرا: $a_n<2 \Rightarrow a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2$ و $a_1=\sqrt{2}<2$

در مرحله بعد به صورت مستقیم نشان می‌دهیم حد این دنباله ۲ است (این حد را باید حدس بزنیم!)

$$|a_{n+1}-2| = \left|\frac{(a_{n+1}-2)(a_{n+1}+2)}{(a_{n+1}+2)}\right| = \frac{|a_{n+1}^2-4|}{a_{n+1}+2} < \frac{|(2+a_n)-4|}{2+2} = \frac{|a_n-2|}{4}$$ (۴ نمره)

و بعد از n بار انجام این کار بدست می‌آید:

$$|a_{n+1}-2| < \frac{1}{4^n}|a_1-2| = \frac{2-\sqrt{2}}{4^n}$$ (۱ نمره)

از طرفی دیگر برای هر $\varepsilon>0$، N ای یافت می‌شود که $\frac{2-\sqrt{2}}{4^N}<\varepsilon$ در نتیجه:

$$\forall n\geq N: \ |a_{n+1}-2| < \frac{2-\sqrt{2}}{4^n} < \frac{2-\sqrt{2}}{4^N} < \varepsilon$$ (۱ نمره)

این هم تبدیل به تعریف همگرایی یعنی دنباله $\{a_n\}$ به ۲ همگرا است.

سوال ۳.

$$A=\{x\in\mathbb{R} : x>0 \text{ و } x^3<2\}$$

الف: $1\in\mathbb{R}$ و $1^3=1<2$ و $0<1$ بنابراین $1\in A$ و درنتیجه A ناتهی است. (۱ نمره)

$x>2 \Rightarrow x^3>8>2 \Rightarrow x\notin A$ (۱ نمره)

بنابراین همه اعضای A کمتر از ۲ اند و ۲ یک کران بالا برای A است. A مجموعه‌ای ناتهی و از بالا کراندار است بنابراین
طبق اصل تمامیت دارای کوچکترین کران بالا است: $\sup A=\alpha$ (۱ نمره)

ب: فرض کنید $\alpha^3<2$. برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

$$(\alpha+\frac{1}{n})^3=\alpha^3+\frac{3\alpha^2}{n}+\frac{3\alpha}{n^2}+\frac{1}{n^3}=\alpha^3+\frac{1}{n}\left[3\alpha^2+\frac{3\alpha}{n}+\frac{1}{n^2}\right]\le\alpha^3+\frac{1}{n}\left[3\alpha^2+3\alpha+1\right]$$

چون $\varepsilon=(2-\alpha^3)/(3\alpha^2+3\alpha+1)>0$، عدد طبیعی $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد که $\frac{1}{n}<\varepsilon$ بنابراین

$$(\alpha+\frac{1}{n})^3\le \alpha^3+\frac{1}{n}\left[3\alpha^2+3\alpha+1\right]<\alpha^3+(2-\alpha^3)=2 \quad \text{و} \quad \alpha+\frac{1}{n}>0 \Rightarrow \alpha+\frac{1}{n}\in A$$

این با کران بالا بودن α برای A در تناقض است. بنابراین فرض $\alpha^3<2$ نمی‌تواند درست باشد (۲ نمره)

این قسمت را اینگونه نیز می‌توان توضیح داد که چون $\alpha+\frac{1}{n}\to\alpha$ بنابراین $(\alpha+\frac{1}{n})^3\to\alpha^3<2$. بنابراین n ای وجود دارد که $(\alpha+\frac{1}{n})^3<2$. یعنی $\alpha<\alpha+\frac{1}{n}\in A$!!.

حال فرض کنید $\alpha^3>2$. برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم:

(۲ نمره)

$$\left(\alpha-\frac{1}{n}\right)^3=\alpha^3-\frac{3\alpha^2}{n}+\frac{3\alpha}{n^2}-\frac{1}{n^3}=\alpha^3-\frac{1}{n}\left[3\alpha^2-\frac{3\alpha}{n}+\frac{1}{n^2}\right]\geqslant\alpha^3-\frac{1}{n}\left[3\alpha^2+1\right]$$

چون $\varepsilon=(\alpha^3-2)/(3\alpha^2+1)>0$، عدد طبیعی $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد که $\frac{1}{n}<\varepsilon$.

$$\left(\alpha-\frac{1}{n}\right)^3\geqslant\alpha^3-\frac{1}{n}\left[3\alpha^2+1\right]>\alpha^3-(\alpha^3-2)=2$$

برای هر $x>\alpha-\frac{1}{n}$ داریم $x^3>(\alpha-\frac{1}{n})^3>2$ بنابراین $x\notin A$. یعنی $\alpha-\frac{1}{n}$ نیز یک کران بالا برای A است. این با کوچکترین کران بالا بودن α متناقض است. در نتیجه فرض $\alpha^3>2$ نمی‌تواند درست باشد. از سه حالت $\alpha^3>2$ و $\alpha^3<2$ و $\alpha^3=2$، دو حالت ابتدایی نمی‌تواند اتفاق بیفتد. بنابراین $\alpha^3=2$

این قسمت را اینگونه نیز می‌توان توضیح داد که چون $\alpha-\frac{1}{n}\to\alpha$ بنابراین $(\alpha-\frac{1}{n})^3\to\alpha^3>2$. در نتیجه nای وجود دارد که $(\alpha-\frac{1}{n})^3>2$. بقیه استدلال مانند بالا است.

ج: اگر $\alpha=\frac{m}{n}$ و این ساده‌ترین نمایش α باشد (یعنی m,n نسبت به هم اول باشند) آنگاه (۱ نمره)

$$2=\alpha^3=\frac{m^3}{n^3}\Rightarrow 2n^3=m^3\Rightarrow m \text{ زوج}\Rightarrow m=2k\Rightarrow 2n^3=8k^3\Rightarrow n^3=4k^3\Rightarrow n \text{ زوج}$$

(۲ نمره) این با اول بودن m, n نسبت به هم متناقض است. بنابراین فرض $\alpha=\frac{m}{n}$ ناممکن است و α گویا نیست.