

نکته: برای حل هر قسمت می‌توانید از نتیجه قسمت‌های قبل اگر چه آنها را حل نکرده اید استفاده کنید.

۱. الف. تمام اعداد مختلط α و β را بیابید که $|\alpha| = |\beta| = 1$ و $\alpha + \beta = -1$. (۵ نمره)

ب. نشان دهید اگر $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ و $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ آنگاه عدد مختلط γ وجود دارد که

$$\{z_1, z_2, z_3\} = \{\gamma, \gamma\omega, \gamma\omega^2\}$$

که در آن ω یک ریشه سوم واحد است. (۵ نمره)

۲. نشان دهید دنباله زیر همگرا است و حد آن را بدست آورید. (۱۰ نمره)

$$a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$$

۳. الف. نشان دهید مجموعه $\{x \in \mathbb{R} : x > 0, x^3 < 2\}$ ناتهی و دارای کوچکترین کران بالا در \mathbb{R} است که آن را در ادامه γ می‌نامیم. (۳ نمره).

ب. نشان دهید $\gamma^3 = 2$. (۴ نمره)

ج. نشان دهید γ گویا نیست. (۳ نمره)

موفق باشید