دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی علوم ریاضی

تمرینات درس
ریاضی عمومی۲

سری چهارم

---

۱. برای هر کدام از حدود زیر، یا حد را محاسبه کنید یا ثابت کنید وجود ندارد.

الف)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$$

ب)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

ج)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6(x-\sin x)+y}{x^3+y}$$

۲. (آدامز، ص۵۳۷) اعداد صحیح و مثبت m، n و p در چه شرایطی باید صدق کنند تا بتوان تابع $f(x,y)=\frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^p}$ را در $(0,0)$ طوری تعریف کرد که حاصل تابعی پیوسته باشد؟

۳. (آدامز، ص۵۴۲) فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته نیست اما با این حال هر دو مشتق جزئی آن در $(0,0)$ موجودند.

۴. (شریف، ۹۵) الف) بردار عمود و معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی

$$x^2+3y^2-z^2+xy-2yz=1$$

را در نقطه‌ای دلخواه از این رویه به‌دست آورید.

ب) نشان دهید نقاطی از رویه‌ی بالا که صفحه‌ی مماس در آن نقطه‌ها از نقطه‌ی $A=(a,b,c)$ می‌گذرند خود روی یک صفحه قرار دارند و معادله‌ی آن صفحه را به دست آورید.

۵. (آدامز، ص۵۴۲) فرض کنید

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^3+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

مشتقات جزئی f را در تمام صفحه محاسبه کنید. آیا این مشتقات جزئی پیوسته‌اند؟

۶. فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی پیوسته باشد که هر دایره به مرکز مبدأ یک خم تراز آن است. ثابت کنید:

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

۷. (شریف، ۹۳) فرض کنید $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی پیوسته باشد با این ویژگی که برای هر $x\in\mathbb{R}^n$، $x\cdot\nabla f(x)=f(x)$. نشان دهید برای هر $t\in\mathbb{R}$ و هر $x\in\mathbb{R}^n$، $f(tx)=tf(x)$.

۸. فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ نگاشتی با مشتقات جزئی پیوسته باشد.

الف) نشان دهید برای هر خم مشتق‌پذیر $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$، عدد $c \in (0,1)$ موجود است به طوری که

$$f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \nabla f(\gamma(c)) \cdot \gamma'(c)$$

ب) نشان دهید برای هر دو نقطه‌ی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) در صفحه، نقطه‌ی (a, b) موجود است به طوری که:

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x_2 - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y_2 - y_1)$$

ج) نتیجه بگیرید که اگر مشتقات جزئی f در تمام صفحه صفر باشند، آنگاه f تابع ثابت است.

۹. تمام توابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ در شرط زیر صدق کنند:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

۱۰. (آدامز، ص۵۴۶) فرض کنید

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

نشان دهید $f_{12}(0,0) = -2$ و $f_{21}(0,0) = 2$.

۱۱. (آدامز، ص۵۵۳) فرض کنید $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابعی همگن از درجه‌ی k باشد که مشتقات جزئی مرتبه دوم آن موجود و پیوسته‌اند. ثابت کنید:

$$x^2 f_{11}(x,y) + 2xy f_{12}(x,y) + y^2 f_{22}(x,y) = k(k-1) f(x,y)$$

۱۲. (آدامز، ص۵۵۳ ـ امیرکبیر، ۸۹) اگر $x = e^s \cos t$، $y = e^s \sin t$، و $z = u(x,y) = v(s,t)$، نشان دهید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (x^2 + y^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$