دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده‌ی علوم ریاضی

تمرینات درس
ریاضی عمومی۲

سری سوم

---

۱. (شریف، ۹۴) از نقطه‌ی $(۰, -۴, -۱۶)$ خطی رسم می‌کنیم که بر منحنی $\vec{r}(t) = (t, t^۲, t^۳)$ مماس باشد. نقطه‌ی مماس شدن خط بر منحنی را بیابید.

۲. (شریف، ۸۷) خم $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۳$ به صورت $\gamma(t) = (\sqrt{۲}t, \cos t + \sin t, -\cos t + \sin t)$ داده شده است.

الف) برای هر t طول خم را از لحظه‌ی ۰ تا لحظه‌ی t محاسبه کنید و خم را بر حسب طول پرمایش کنید.

ب) کنج فرنه $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ را برای خم به دست آورید.

ج) انحناء و تاب خم را محاسبه کنید.

۳. (آدامز، ص۵۱۰) نشان دهید اگر انحنای یک خم در تمام نقاط آن صفر باشد، آن خم یک خط راست است.

۴. (آدامز، ص۵۱۰) نشان دهید اگر تاب یک خم در تمام نقاط صفر باشد، آن خم یک خم مسطح است (یعنی تصویر آن در یک صفحه واقع شده است).

۵. (آدامز، ص۵۱۰) نشان دهید اگر انحنای یک خم در تمام نقاط آن برابر یک ثابت مثبت باشد و تاب آن صفر باشد، آنگاه آن خم یک دایره است.

۶. (آدامز، ص۵۱۰) نشان دهید که اگر انحناء و تاب یک خم هر دو ثابت و ناصفر باشند، آن خم یک مارپیچ مستدیر است.

۷. (شریف، ۸۷) خم فرنه γ (یعنی خم دوبار مشتق‌پذیری که انحنای آن هیچ‌جا صفر نیست) با کنج فرنه‌ی $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ و بردار ثابت و یکه‌ی $\vec{U}$ در $\mathbb{R}^۳$ داده شده‌اند. فرض کنید γ به گونه‌ای است که مماس واحد آن، یعنی $\vec{T}$، همواره زاویه‌ای ثابت با $\vec{U}$ می‌سازد. نشان دهید $\vec{U}$ را می‌توان به صورت $\vec{U} = (\cos\alpha)\vec{T} + (\sin\alpha)\vec{B}$ نوشت که در آن α ثابت است.

۸. (آدامز، ص۵۱۵) بردارهای مماس یکه، قائم اصلی و قائم دوم و کمیت‌های انحناء و تاب را برای خم $\vec{r} = t\vec{i} + \frac{t^۲}{۲}\vec{j} + \frac{t^۳}{۳}\vec{k}$ پیدا کنید.

۹. (امیرکبیر، ۸۸) برای منحنی

$$\vec{r}(t) = (t - \frac{t^۳}{۳})\vec{i} + t^۲\vec{j} + (t + \frac{t^۳}{۳})\vec{k}$$

نشان دهید که $\kappa = \tau = \frac{۱}{(۱+t^۲)^۲}$.

۱۰. (آدامز، ص۵۱۵) بیشترین و کمترین مقدار انحنای بیضی $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ را بیابید ($a > b > ۰$).

۱۱. (آدامز، ص۵۱۵) نشان دهید انحنای منحنی قطبی $r = f(\theta)$ در نقطه‌ی دلخواه θ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\kappa = \frac{\left|۲f'(\theta)^۲ + f(\theta)^۲ - f(\theta)f''(\theta)\right|}{\left(f'(\theta)^۲ + f(\theta)^۲\right)^{۳/۲}}$$

۱۲. (شریف، ۹۰) نشان دهید انحنای یک خم روی کره‌ی واحد حداقل ۱ است.

۱۳. (آدامز، ص۵۱۵) فرض کنید $\vec{r} = \vec{r}(t)$ یک خم و $\vec{c}$ بردار ثابت ناصفری در $\mathbb{R}^۳$ باشد و داشته باشیم $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{c} \times \vec{r}(t)$. ثابت کنید تصویر $\vec{r}$ روی یک دایره قرار دارد.

۱۴. (شریف، ۹۷) فرض کنید A یک ماتریس پادمتقارن ناصفر ۳×۳ است (یعنی $A^T = -A$) و $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^۳$ تابعی مشتق‌پذیر است به طوری که $\frac{d\vec{r}}{dt} = A\vec{r}(t)$. نشان دهید تصویر $\vec{r}$ روی یک دایره قرار دارد.

۱۵. (آدامز، ص۵۱۵) فرض کنید مکان $\vec{r}$، سرعت $\vec{v}$ و شتاب $\vec{r}$ یک ذره‌ی متحرک در

$$\vec{a}(t) = \lambda(t)\vec{r}(t) + \mu\vec{v}(t)$$

صدق می‌کند، که در آن $\lambda(t)$ و $\mu(t)$ دو تابع اسکالر از زمان t هستند. با فرض $\vec{v} \times \vec{a} \neq 0$ نشان دهید که مسیر ذره روی یک صفحه قرار می‌گیرد.