



۱. (شریف، ۹۷) فرض کنید:

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}, v_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نشان دهید $\{v_1, v_2, v_3\}$ یک پایه‌ی متعامد و یک از بردارهای ویژه‌ی ماتریس C است. مقادیر ویژه‌ی متناظر این بردارها را مشخص کنید و به کمک آن‌ها $x \in \mathbb{R}^3$ را چنان بیابید که $2Cx = b$.

۲. (شریف، ۹۴) فرض کنید A یک ماتریس 3×3 باشد و u_1, u_2, u_3 سه بردار ناصفر در \mathbb{R}^3 باشند با این ویژگی که $Au_1 = u_1$ ، $Au_2 = 2u_2$ و $Au_3 = 3u_3$. نشان دهید u_1, u_2, u_3 مستقل خطی‌اند.

۳. الف) فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد و $x, y \in \mathbb{R}^n$. نشان دهید:

$$(Ax) \cdot y = x \cdot (A^T y)$$

ب) نشان دهید بردارهای ویژه‌ی نظیر مقادیر ویژه‌ی متمایز یک ماتریس متقارن بر هم عمودند.

۴. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حافظ فاصله باشد، یعنی برای هر $u, v \in \mathbb{R}^n$ $|f(u) - f(v)| = |u - v|$. همچنین فرض کنید $f(0) = 0$. ثابت کنید f نگاشتی خطی است.

۵. (آدامز، ص ۴۹۳) ذره‌ی روی خم محل تقاطع دو استوانه‌ی $y = -x^2$ و $z = x^2$ حرکت می‌کند، به طوری که مؤلفه‌ی x آن رو به افزایش است (همه‌ی فواصل بر حسب سانتیمتر هستند). در لحظه‌ای که ذره به نقطه‌ی $(1, -1, 1)$ می‌رسد اندازه‌ی سرعت آن برابر 9 cm/s است و این اندازه‌ی سرعت با آهنگ 3 cm/s^2 افزایش می‌یابد. سرعت و شتاب ذره را در این لحظه بیابید.

۶. (آدامز، ص ۵۰۴) صفحه‌ی $z = 1 + x$ مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ را در یک سهمی قطع می‌کند. این سهمی را با استفاده از پارامتر (الف) $t = x$ ، (ب) $t = y$ و (ج) $t = z$ پرمایش کنید. از این t ها کدام به یک پرمایش منجر می‌شود که نمایش تمام سهمی است؟ این پرمایش چیست؟ با دو انتخاب دیگر چه رخ می‌دهد؟

۷. (آدامز، ص ۵۰۴) صفحه‌ی $x + y + z = 1$ کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را در دایره‌ی C قطع می‌کند. مرکز و شعاع C را بیابید. همچنین دو بردار یکه‌ی عمود بر هم موازی صفحه‌ی شامل C پیدا کنید و به کمک آن‌ها C را پرمایش نمایید.

۸. فرض کنید $a, b > 0$. منحنی پارامتری داده شده با

$$x = a \cos t \sin t, \quad y = a \sin^2 t, \quad z = bt$$

را توصیف کنید. طول این منحنی بین $t = 0$ و $t = T > 0$ چقدر است؟

۹. (آدامز، ص ۵۰۴) فصل مشترک کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و استوانه‌ی بیضوی $x^2 + 2z^2 = 1$ را توصیف کنید. طول کل این منحنی فصل مشترک را بیابید.

۱۰. (آدامز، ص ۵۰۴) فرض کنید C منحنی

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = t$$

بین $t = 0$ و $t = 2\pi$ باشد. طول C را پیدا کنید.

۱۱. (آدامز، ص ۵۰۴) یک کابل به طول L و مقطع عرضی مستدیر به شعاع a حول یک قرقره‌ی استوانه‌ای به شعاع b بی‌آنکه روی هم قرار گیرد و فقط سیم‌ها با هم تماس دارند پیچیده شده است. چه طولی از قرقره توسط کابل پوشانده شده است؟

۱۲. (آدامز، ص ۵۰۴) در هر مورد منحنی داده شده را در همان جهت و بر حسب طول قوسی که از نقطه‌ی نظیر $t = 0$ سنجیده می‌شود مجدداً پارامتریزه کنید.

(الف)

$$r = a(\cos^3 t)\vec{i} + a(\sin^3 t)\vec{j} + b(\cos 2t)\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

(ب)

$$\vec{r} = (3t \cos t)\vec{i} + (3t \sin t)\vec{j} + 2\sqrt{2}t^{3/2}\vec{k}, \quad 0 \leq t$$

۱۳. (شریف ۹۵) توابع مشتق‌پذیر $T, N, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ به گونه‌ای هستند که برای هر t ، $T(t)$ ، $N(t)$ و $B(t)$ متعامد و یکه‌اند. نشان دهید اگر برای t_0 داشته باشیم $T'(t_0) \parallel N(t_0)$ ، آنگاه $B'(t_0) \parallel N(t_0)$.