



۱. (آدامز، ص ۴۵۸) زاویه‌ی بین یک قطر یک مکعب و یک قطر یکی از وجوه مکعب را بیابید. همه‌ی جواب‌های ممکن را پیدا کنید.

۲. (آدامز، ص ۴۵۸) اعداد ثابت r, s, t که $r \neq 0$ و $s \neq 0$ و بردار a که در شرط $|a|^2 > 4rst$ صدق می‌کند داده شده‌اند. دستگاه معادلات

$$\begin{cases} rx + sy = a \\ x \cdot y = t \end{cases}$$

را نسبت به بردارهای مجهول x و y حل کنید.

۳. (آدامز، ص ۴۶۴) بردار یک‌ه‌ای بیابید که بر صفحه‌ی گذرا از سه نقطه‌ی $A = (a, 0, 0)$ ، $B = (0, b, 0)$ و $C = (0, 0, c)$ عمود باشد. مساحت مثلثی که این سه نقطه رئوس آن باشند چیست؟

۴. (آدامز، ص ۴۶۴) برای چه مقدار k ، چهار نقطه‌ی $A = (1, 1, -1)$ ، $B = (0, 3, -2)$ ، $C = (-2, 1, 0)$ و $D = (k, 0, 2)$ روی یک صفحه قرار می‌گیرند؟

۵. (آدامز، ص ۴۶۴) (ضرب سه‌گانه‌ی برداری) برای سه بردار u, v, w در \mathbb{R}^3 نشان دهید:

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$$

۶. (اتحاد لاگرانژ) برای هر چهار بردار a, b, c, d در \mathbb{R}^3 نشان دهید:

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$$

۷. (آدامز، ص ۴۶۵) بردارهای ناصفر a و b چه شرایطی باید داشته باشند تا معادله‌ی $a \times x = b$ دارای جوابی برای x باشد؟ در صورت برقرار این شرط، همه‌ی جواب‌ها را بیابید.

۸. (آدامز، ص ۴۶۹) الف) معادله‌ی صفحه‌ای را بیابید که از دو نقطه‌ی $A = (1, 1, 1)$ و $B = (2, 0, 3)$ بگذرد و بر صفحه‌ی $x + 2y - 3z = 0$ عمود باشد.

ب) معادله‌ی صفحه‌ای را بیابید که از فصل مشترک صفحات $2x + 3y - z = 0$ و $x - 4y + 2z = -5$ و نقطه‌ی $(-2, 0, -1)$ عبور کند.

۹. (آدامز، ص ۴۷۰) فاصله‌ی مبدأ تا خط

$$x + y + z = 0, 2x - y - 5z = 1$$

را بیابید.

۱۰. (آدامز، ص ۴۷۰) فاصله‌ی بین دو خط

$$x + 2y = 3, y + 2z = 3$$

و

$$x + y + z = 6, x - 2z = -5$$

را بیابید.

۱۱. (آدامز، ص ۴۸۷) فرض کنید A و B دو نقطه‌ی متمایز در \mathbb{R}^3 باشند. نشان دهید که فاصله‌ی نقطه‌ی P تا خط گذرا از A و B برابر است با:

$$\frac{|(r_A - r_P) \times (r_B - r_P)|}{|r_A - r_B|}$$

که در آن منظور از r_X بردار مکان نقطه‌ی X است.

۱۲. (آدامز، ص ۴۸۱) تعیین کنید که هر کدام از ماتریس‌های زیر، مثبت معین، منفی معین، مثبت نیمه معین، منفی نیمه معین یا نامعین هستند.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

۱۳. (آدامز، ص ۴۷۳) در هر مورد، زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R}^3 را که معادله‌ی داده شده توصیف می‌کند شناسایی کنید.

الف) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 12z + 27 = 0$

ب) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4x - 8y = 8$

ج) $z = x^2 + 2y^2$

د) $z = x^2 - 2y^2$

ه) $(z - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$

و) $(z - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + 4$

۱۴. (شریف ۹۷) مرکز و شعاع دایره‌ی حاصل از تقاطع صفحه‌ی $x + y + z = 1$ و کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را به دست آورید.

۱۵. (آدامز، ص ۴۷۳) معادله‌ی $2x^2 + y^2 = 1$ نمایش یک استوانه با مقاطع بیضی شکل در صفحات عمود بر محور z است. بردار a را چنان بیابید که صفحات عمود بر a ، این استوانه را در یک دایره قطع کنند.

۱۶. (آدامز، ص ۴۷۴) معادله‌ی $2x^2 + y^2 = z^2$ نمایش یک مخروط با مقاطع بیضوی در صفحات عمود بر محور z است. بردار a را چنان بیابید که صفحات عمود بر a ، این مخروط را در یک دایره قطع کنند.